
ARTÍCULO

Concepciones Previas sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales: un Estudio Exploratorio con Estudiantes Universitarios

Previous Conceptions about Systems of Linear Equations: an Exploratory Study with University Students

Elizabeth Rozas-Torres*

 ORCID iD 0000-0002-8204-2938

Andrea Cárcamo**

 ORCID iD 0000-0001-5782-3479

Josep M. Fortuny***

 ORCID iD 0000-0002-8231-346X

Resumen

En este estudio exploratorio, nos enfocamos en identificar las concepciones previas que tienen los estudiantes de primer año de universidad con respecto a los conceptos de ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales (SEL) con dos incógnitas. El conocimiento de dichas concepciones servirá para conocer lo que están aprendiendo los estudiantes y como punto de partida para la planificación de la enseñanza del contenido de SEL de $m \times n$. Con este propósito, aplicamos un cuestionario con preguntas abiertas a 24 estudiantes de ingeniería que estaban cursando Álgebra Lineal. Este cuestionario contenía preguntas sobre la representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas y de un SEL de 3×2 , la cantidad de soluciones de una ecuación lineal y de un SEL, una solución particular de un SEL y lo que entienden por solución de un SEL. Posteriormente, analizamos sus protocolos escritos en función de los modos de pensamiento del Álgebra Lineal: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural. Nuestros resultados revelaron que los estudiantes identifican la ecuación lineal con una recta. Sin embargo, predominan las concepciones erróneas referente a la cantidad de soluciones que tiene una ecuación lineal o que puede tener un SEL con dos incógnitas. Además, observamos que en los argumentos de los estudiantes prevalece el modo analítico-aritmético y manifiestan dificultad para transitar al modo sintético-geométrico cuando la tarea se plantea en un modo diferente.

* Estudiante del Programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB), Barcelona, España y Académica del Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería de la Universidad Austral de Chile (UACH), Valdivia, Chile. E-mail: elizabeth.rozas@uach.cl

** Doctora en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Académica del Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería de la Universidad Austral de Chile (UACH), Valdivia, Chile. E-mail: andrea.carcamo@uach.cl

*** Doctor en Ciencias Matemáticas, Universitat de les Illes Balears (UIB), Illes Balears, España. Profesor Emérito del Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Barcelona, Catalunya, España. E-mail: JosepMaria.Fortuny@uab.cat

Palabras clave: Álgebra Lineal. Sistemas de Ecuaciones Lineales. Educación Universitaria. Modos de Pensamiento.

Abstract

In this exploratory study, we focused on identifying first-year university students' prior conceptions regarding the concepts of linear equations and the system of linear equations (SLE) with two unknowns. The knowledge of these conceptions will serve to understand what students are learning and as a starting point for planning the teaching of the SLE content of $m \times n$. For this, 24 engineering students who were studying Linear Algebra answered a questionnaire with open questions about the graphic representation of a linear equation with two unknowns and a 3×2 SLE, the number of solutions of a linear equation and a SLE, a particular solution of a SLE and what they understand by the solution of a SLE. Later we analyzed their written protocols based on the thinking modes of Linear Algebra: synthetic-geometric, analytical-arithmetic, and analytical-structural. Our results revealed that the students identified the linear equation with a straight line. However, misconceptions predominate regarding a linear equation's number of solutions or the quantity a SLE with two unknowns can have. In addition, we observed that in the students' arguments, the analytic-arithmetic mode prevails, and they express difficulty in transitioning to the synthetic-geometric mode when the task is presented in a different mode.

Keywords: Linear Algebra. Systems of Linear Equations. University Education. Modes of Thinking.

1 Introducción

Los SEL constituyen un contenido central en el curso de Álgebra Lineal porque sirven de herramienta para abordar conceptos fundamentales como: vectores linealmente dependientes en espacios vectoriales, bases de espacios vectoriales, transformaciones lineales, vectores y espacios propios. Sin embargo, los estudiantes presentan dificultades con los SEL en su resolución, conceptualización, comprensión y visualización de su conjunto solución (Mutambara; Bansilal, 2022; Rodríguez *et al.*, 2019). Para minimizar estas dificultades, es fundamental planificar la enseñanza de este contenido considerando, como punto de partida, las concepciones previas de los estudiantes respecto al mismo (Castro; Prat; Gorgorio, 2017).

Las concepciones son las representaciones internas evocadas por un concepto. Estas describen la naturaleza de los objetos matemáticos y las diferentes imágenes de estos objetos en la mente del estudiante, ya sean simbólicas, gráficas u otras (Martínez Silva; Gorgorió, 2004). En particular, las concepciones se refieren a la comprensión del conocimiento, lo que involucra creencias, teorías, explicaciones y significados que los estudiantes tienen sobre los conceptos. En otras palabras, lo que el estudiante *ya sabe* (Olmedo; Galindez, 2014).

En el siglo pasado, Ausubel, Novak y Hanesian (1983) destacaron la importancia de las concepciones previas de los estudiantes porque influyen significativamente en el aprendizaje. Esta perspectiva influyó en la investigación educativa, motivando a los investigadores de la enseñanza de las ciencias a iniciar estudios sobre las concepciones previas de los estudiantes como punto de partida para la enseñanza (Campanario; Otero, 2000).

El estudio de las concepciones no sólo permite evaluar el efecto de la enseñanza de conceptos previos, sino que también contribuye a determinar qué se está aprendiendo realmente, brindando orientación sobre qué y cómo enseñar (Gómez, 2010). No obstante, si las concepciones previas son omitidas, estas pueden transformarse en obstáculos para el aprendizaje alrededor de los cuales se agrupan errores recurrentes (Castro; Prat; Gorgorio, 2017; Rivera; Dolores, 2021).

Las concepciones previas de los estudiantes desempeñan un papel relevante porque condicionan la forma en que estos abordarán las tareas de aprendizaje relativas al concepto que están construyendo (Rios-Cuesta; Aspirila-Mena, 2022). Por esta razón, es esencial conocer las concepciones previas de los estudiantes antes de iniciar el proceso de aprendizaje de un nuevo concepto. Así, se pueden articular las concepciones previas con los nuevos conceptos para contribuir a la necesidad, manifestada por Oktaç y Trigueros (2010), de diseñar tareas que permitan a los estudiantes construir de manera más sólida los contenidos del curso de Álgebra Lineal, asegurando que los conceptos tengan sentido y estén estrechamente interconectados entre sí.

Teniendo en cuenta los planteamientos anteriores, el problema de investigación se centra en entender las concepciones previas de los estudiantes como un posible factor que favorece las dificultades con el contenido de SEL de $m \times n$ (en su resolución, conceptualización, comprensión y visualización de su conjunto solución) en el contexto del curso de Álgebra Lineal.

Por lo expuesto, el objetivo de nuestra investigación exploratoria es identificar las concepciones previas que tienen los estudiantes de primer año de universidad con respecto a los conceptos de ecuación lineal con dos incógnitas y SEL con dos incógnitas, previo a iniciar el estudio del contenido de SEL de mxn en el curso de Álgebra Lineal.

Con este estudio, esperamos contribuir a la línea de investigación de la *Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra Lineal* (Trigueros; Wawro, 2020). En concreto, a la línea de caracterizaciones de la comprensión de los estudiantes de conceptos particulares del álgebra lineal en el nivel universitario. Además, basados en evidencia empírica, aportamos antecedentes a los docentes del curso de Álgebra Lineal para planificar la enseñanza de SEL de $m \times n$ y anticipar un posible proceso de aprendizaje para el concepto.

2 Marco Teórico

Consideramos como fundamento teórico, los modos de pensamiento del Álgebra Lineal propuestos por Sierpinska (2000) y los estudios sobre concepciones de SEL. Estos se utilizarán para interpretar y comparar con las concepciones que manifiestan los estudiantes de primer año de universidad de esta investigación, previo a estudiar SEL de $m \times n$.

2.1 Modos de pensamiento propuestos por Sierpinska

Según Sierpinska (2000) coexisten tres modos de pensamiento en Álgebra Lineal: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural. Estos tres modos utilizan un sistema específico de representaciones.

El modo sintético-geométrico corresponde a los objetos geométricos tal como son percibidos por nuestros sentidos. Por ejemplo, pensar en una ecuación lineal como rectas en el plano. Por otro lado, en los modos analítico-aritmético y analítico-estructural, la interacción con los objetos es indirecta, se emplean símbolos y la persona que está pensando en estos modos debe pasar por una interpretación para trabajar con conceptos matemáticos. En el modo analítico-aritmético, las ecuaciones que forman un SEL pueden ser resueltas usando diferentes métodos y para interpretar los símbolos como ecuaciones es necesario algún antecedente. En el modo analítico-estructural, el énfasis se encuentra en las propiedades de los objetos. En este modo, por ejemplo, se puede preguntar en qué condiciones un SEL tiene solución única (Oktaç, 2018).

Sierpinska (2000) ejemplifica los modos de pensamiento con un SEL de tres ecuaciones y tres incógnitas. Se está en el modo sintético-geométrico, si se piensa en las posibles soluciones para el SEL visualizando las posibles posiciones relativas de tres planos en el espacio. Por otro lado, se está en el modo analítico-aritmético si se piensa en términos de los posibles resultados de una reducción por filas de una matriz aumentada de 3×4 y en el modo analítico-estructural, si se piensa en términos de matrices singulares y no singulares. Sierpinska (2000) advierte que estos tres modos de pensamiento no deben interpretarse como pasos (o etapas) en el desarrollo del pensamiento, sino como modos de pensar y razonar todos útiles por igual, más aún cuando interactúan entre sí.

2.2 Estudios sobre concepciones de SEL

Son recientes las investigaciones relativas a las concepciones de SEL. Oktaç (2018) estudió las concepciones que desarrollaron los estudiantes de secundaria y universidad sobre

SEL y solución de un SEL. Oktaç (2018) analizó estas concepciones en los modos sintético-geométrico y analítico en espacios bidimensionales y tridimensionales. Sus resultados reportaron que entre los factores que influyen en las concepciones que desarrollan los estudiantes sobre SEL y solución de un SEL, se encuentran las concepciones previas que tienen acerca de qué es una ecuación lineal y qué es una solución de una ecuación lineal.

Cárcamo; Fuentealba y Tauler (2021) realizaron un estudio exploratorio que tuvo como objetivo identificar las concepciones que muestran estudiantes universitarios de primer año al enfrentarse a preguntas que implican resolver SEL de 3×2 con solución vacía. Ellos identificaron tres concepciones que los estudiantes tienen al resolver un SEL de 3×2 con solución vacía, dos de las cuales son erróneas. Estos autores concluyeron que los estudiantes no comprenden el significado de la solución de un SEL y, por esta razón, presentaron inconvenientes para resolver un SEL correctamente cuando estaba representado gráfica o analíticamente.

3 Metodología

Nuestro estudio de carácter exploratorio tuvo como objetivo identificar las concepciones previas que tienen los estudiantes respecto a ecuación lineal y SEL. Para ello, analizamos sus protocolos escritos de un cuestionario que respondieron sobre la representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas y de un SEL de 3×2 , la cantidad de soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas y de un SEL, la solución particular de un SEL y lo que entienden por solución de un SEL. El análisis lo realizamos bajo un enfoque principalmente cualitativo, adoptando una perspectiva interpretativa y descriptiva (Bisquerra, 2009).

3.1 Participantes

En nuestro estudio participaron 24 estudiantes de primer año que estaban cursando Álgebra Lineal en una universidad chilena. En adelante, nos referiremos a ellos como E1, E2 hasta E24. Estos estudiantes previamente habían cursado los contenidos de matrices y determinantes e iban a iniciar el estudio de SEL de $m \times n$. Además, de acuerdo con el currículum de estudio de secundaria de Chile, ellos ya habían estudiado SEL de 2×2 .

3.2 Instrumento y recogida de datos

Con el propósito de recoger información acerca de las concepciones previas que tienen los estudiantes universitarios sobre ecuaciones lineales y SEL, diseñamos un cuestionario con tres tareas, a su vez cada una de ellas consta de varias preguntas de respuesta abierta. En el proceso de diseño, efectuamos una revisión de los documentos oficiales proporcionados por el Ministerio de Educación de Chile, específicamente, las Bases Curriculares 7° básico a 2° medio (s.f) y el texto del estudiante de primero medio (Fresno; Torres; Ávila, 2020). Además, consideramos investigaciones previas sobre SEL (Andrews-Larson, 2015; Campos, 2017; Cárcamo; Fuentealba; Tauler, 2021; Ochoviet, 2009; Oktaç, 2018).

El cuestionario diseñado lo sometimos a revisión por expertos. Posteriormente, lo validamos empíricamente aplicándolo a un grupo de 38 estudiantes de un curso de Álgebra Lineal antes de que iniciaran el estudio de SEL de $m \times n$. Además, efectuamos entrevistas semiestructuradas a algunos de estos estudiantes con base en sus protocolos escritos del cuestionario. Este proceso nos permitió identificar imprecisiones en los enunciados de las tareas y, en consecuencia, reformularlos.

Aplicamos la versión reformulada del cuestionario a un nuevo grupo de 24 estudiantes de un curso de Álgebra Lineal, previo a que iniciarán el estudio de SEL de $m \times n$. Los estudiantes tuvieron 60 minutos para responderlo individualmente. En algunas de las tareas del cuestionario, los estudiantes utilizaron el *software* de geometría dinámica GeoGebra, ya sea en su ordenador o dispositivo móvil.

Realizamos entrevistas semiestructuradas a 5 estudiantes que participaron voluntariamente con la finalidad de profundizar en sus respuestas escritas. Estas entrevistas, las efectuamos en la oficina de una de las investigadoras, teniendo una duración de 30 minutos aproximadamente y se grabaron en formato de audio.

En el Cuadro 1, detallamos el objetivo de cada tarea incluida en el cuestionario y las preguntas que seleccionamos para esta investigación. Estas preguntas fueron elegidas debido a la diversidad de respuestas entregadas por los estudiantes y nuestro interés en identificar las concepciones de los estudiantes tanto geométricas como analíticas.

Objetivo de la tarea	Pregunta seleccionada
Tarea 1: identificar las concepciones que tienen los estudiantes sobre una ecuación lineal de la forma $ax + by = c$ con $a \neq 0, b \neq 0$.	¿Qué representa gráficamente una ecuación lineal con dos incógnitas? (P1T1)
	¿Cuántas soluciones puede tener una ecuación lineal con dos incógnitas? Ejemplifique. (P2T1)
Tarea 2: identificar las concepciones que tienen los estudiantes sobre SEL de 2×2 y sus soluciones.	Dado el SEL $\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right $

	¿Es (0,1) solución del sistema de ecuaciones lineales dado? ¿Por qué? (P1T2)
	¿Qué significa ser una solución para un sistema de ecuaciones lineales? (P2T2)
	¿Cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones lineales? (P3T3)
Tarea 3: identificar las concepciones que tienen los estudiantes sobre las soluciones de un SEL de 3×2 representado gráficamente.	Grafique en GeoGebra el SEL de 3×2 dado ¿Cuántas soluciones tienen el sistema de ecuaciones lineales? ¿Por qué? (PT3)

Cuadro 1 – Descripción del objetivo y preguntas seleccionadas de las tareas del cuestionario
Fuente: Elaborado por los autores

3.3 Análisis de datos

La identificación de las concepciones emergió de la organización y el análisis de los protocolos escritos de las tareas del cuestionario. El proceso de análisis de datos constó de cuatro fases. En la primera fase, transcribimos en una planilla Excel las respuestas escritas de los estudiantes a cada una de las preguntas del cuestionario. En la segunda fase, etiquetamos estas respuestas como correctas, erróneas o no responde. En la Tabla 1, mostramos la frecuencia porcentual del tipo de respuesta proporcionada por los estudiantes.

Tabla 1 – Frecuencia porcentual del tipo de respuesta entregada por los estudiantes a las preguntas seleccionadas de las Tareas del cuestionario

Pregunta	P1T1	P2T1	P1T2	P2T2	P3T2	PT3
Correcta	87%	33%	75%	71%	21%	71%
Errónea	0%	42%	0	8%	54%	17%
No responde	13%	25%	25%	21%	25%	13%

Fuente: Elaborado por los autores

En la tercera fase, categorizamos las concepciones de los estudiantes sobre una ecuación lineal con dos incógnitas y sobre los SEL de 2×2 y 3×2 a través de categorías que emergieron de la codificación y la comparación de los datos por parte de los investigadores. Esta tercera fase dio origen al Cuadro 2 en donde detallamos las concepciones emergentes identificadas y su respectiva frecuencia porcentual, respecto a la cantidad de estudiantes que respondió el cuestionario. Además, para garantizar la confiabilidad de este estudio, los investigadores codificaron y compararon los datos a través de reuniones periódicas. Durante este proceso, cuando surgían desacuerdos, los investigadores lo analizaban hasta llegar a un consenso.

En la cuarta fase de análisis, interpretamos las concepciones que tienen los estudiantes, obtenidas en la tercera fase, desde los modos de pensamiento de Sierpinska (2000) y los comparamos con los estudios sobre concepciones de SEL.

4 Resultados

En este apartado, presentamos las concepciones que identificamos en los estudiantes con respecto a la representación gráfica y la cantidad de soluciones de la ecuación lineal con dos incógnitas (sección 4.1). Asimismo, exponemos las concepciones que identificamos en los estudiantes sobre SEL en relación con: una solución particular de un SEL dado, lo que entienden por solución de un SEL, la cantidad de soluciones que pueden tener un SEL y la representación gráfica de un SEL particular de 3×2 (sección 4.2). En el cuadro 2, detallamos las concepciones emergentes de las categorías mencionadas y su respectiva frecuencia porcentual.

Concepto	Categoría	Concepciones identificadas	Frecuencia
Ecuación Lineal con dos incógnitas	Representación gráfica de la ecuación lineal con dos incógnitas	Representa una recta.	88%
	Cantidad de soluciones de la ecuación lineal con dos incógnitas	Infinitas soluciones.	33%
		Solución única.	13%
		Dos tipos de soluciones.	29%
SEL con dos incógnitas	Solución particular de un SEL	No es solución porque no satisface las ecuaciones del sistema de ecuaciones lineales.	67%
		No es solución, pues al resolver el SEL se obtiene (3,-1) como solución.	8%
	Qué significa ser solución de un SEL	Una solución para un SEL satisface todas sus ecuaciones.	67%
		Una solución para un SEL es un punto que pertenece a las rectas y cumple con sus reglas de correspondencia.	4%
		Una solución para un SEL es el resultado de una de sus incógnitas.	8%
	Tipos de soluciones de un SEL de 2×2	Tres tipos de soluciones: infinitas soluciones, solución única o no tiene soluciones.	21%
		Un SEL puede tener infinitas soluciones.	21%
		Un SEL puede tener solo una solución.	17%
		Un SEL puede tener dos soluciones.	17%
	Representación gráfica de un SEL de 3×2	El SEL no tiene soluciones porque no hay un punto de intersección entre las rectas.	71%
EL SEL tiene solución porque hay tres puntos de intersección.		17%	

Cuadro 2– Resumen de las concepciones emergentes sobre ecuación lineal y SEL con dos incógnitas

Fuente: Elaborado por los autores

A continuación, describimos y ejemplificamos cada una de las concepciones emergentes identificadas.

4.1 Representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas

Todos los estudiantes que respondieron a la pregunta ¿qué representa gráficamente una ecuación lineal con dos incógnitas? tienen la concepción de que una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano, lo cual es correcto. Por ejemplo:

E9: representa una recta en el plano.

E2: una recta con cierta pendiente y que sus puntos cumplen su regla de correspondencia. [Incluso E2 proporcionó un ejemplo de una recta que denominó] ℓ ($\ell := f(x): 3x + y = 0$), [exhibió tres puntos de esa recta] $P(0,0)$, $P(1,-3)$ y $P(2,-6)$ [e incluyó la representación gráfica de la recta ℓ en el plano cartesiano (ver Figura 1)].

(Respuestas de los estudiantes, 2023).

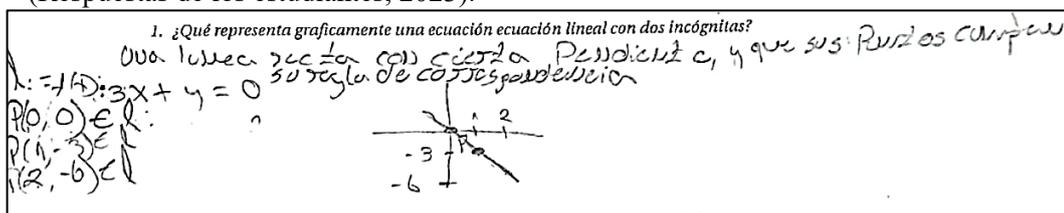


Figura 1 – Protocolo escrito por el estudiante E2 sobre la representación gráfica de una ecuación lineal
Fuente: elaborado por los autores

Con la pregunta, ¿qué representa gráficamente una ecuación lineal con dos incógnitas?, se esperaba que los estudiantes relacionaran el modo analítico-aritmético con el modo sintético-geométrico. Algunos estudiantes, en sus protocolos escritos evidenciaron dicha relación. Por ejemplo, el estudiante E2 fundamentó su respuesta exhibiendo una ecuación de una recta:

E2: $\ell := f(x): 3x + y = 0$ [modo analítico-aritmético, e incluyó la representación gráfica de ℓ modo sintético-geométrico].

(Respuesta del estudiante, 2023).

4.2 Cantidad de soluciones de la ecuación lineal con dos incógnitas

Identificamos tres concepciones que manifiestan los estudiantes sobre la cantidad de soluciones que puede tener una ecuación lineal con dos incógnitas. Estas son: infinitas soluciones, solución única y dos tipos de soluciones.

Los estudiantes que tienen la concepción (correcta) de que una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, en general, relacionaron la ecuación lineal con dos incógnitas con su representación gráfica. Es decir, transitron de manera natural por los modos de pensamiento analítico-aritmético y sintético-geométrico. Por ejemplo:

E2: Puede tener infinitas soluciones, ya que representa una recta en el gráfico, por lo que pueden ser infinitos puntos siempre y cuando cumplan su regla de correspondencia.

(Respuesta del estudiante, 2023).

Además, agregó, como ejemplo, la ecuación una recta $\ell: f(x): 3x + y = 0$. Luego, E2 construyó una tabla de valores para las incógnitas x e y , los que utilizó para realizar un esbozo de la recta ℓ (Figura 2).

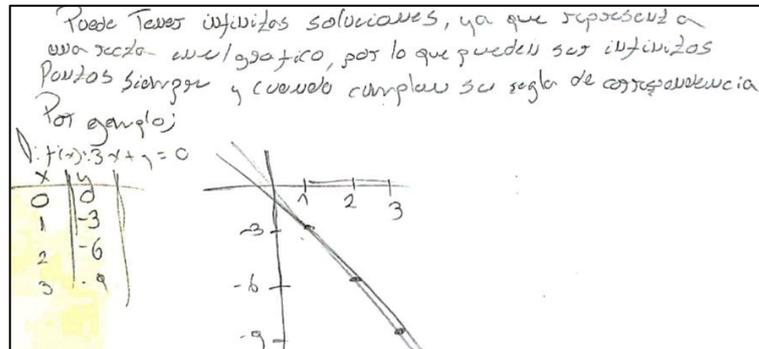


Figura 2 – Protocolo escrito por E2 sobre la solución de ecuación lineal con dos incógnitas
Fuente: elaborado por los autores

De manera similar, el estudiante E6 escribió:

E6: tiene infinitas soluciones porque al ser una recta infinita, hay infinita combinación de números que satisfagan la ecuación. [E6 complementó su respuesta dando como ejemplo la ecuación “ $y = x$ ” y mostrando pares de números que la satisficieran: $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 4$, y así infinitamente.

(Respuesta del estudiante, 2023).

Por su parte, el estudiante E4 no argumentó su respuesta, pues sólo escribió:

E4: una ecuación lineal tiene infinitas soluciones. [Al pedirle que ejemplifique su respuesta, E4 no supo cómo hacerlo y expresó]: es que en mi mente suena lógico, pero para explicarlo no sé.

(Respuesta del estudiante, 2023).

De esto, inferimos que E4 sólo tiene la idea memorizada de que una ecuación lineal tiene infinitas soluciones, pero no la comprende.

Además, identificamos que la mayoría de los estudiantes que tienen una concepción errónea sobre la cantidad de soluciones que tiene una ecuación lineal con dos incógnitas mostraron un argumento errado a través de un trabajo algebraico (como E23, Figura 3) o usando ecuaciones (como E20, Figura 4). Es decir, argumentaron únicamente desde el modo de pensamiento analítico-aritmético.

El estudiante E23 (ver Figura 3) indicó:

E23: una ecuación lineal tiene solo una solución, [y argumentó que] al ser una ecuación lineal va a tener una solución a diferencia de la ecuación cuadrática, que tiene dos. [Además, agregó dos ejemplos. En el primero, anotó una ecuación lineal con dos incógnitas ($y = 2x$), le asignó un valor a la incógnita y ($y = 2$). Luego, obtuvo el valor para x ($x = 1$) y agregó que] el único número posible que te puede dar 2 es cuando $x = 1$. [En el segundo ejemplo, escribió una ecuación cuadrática ($4 = x^2$) y expresó que] en este caso hay dos soluciones al enigma ($x_1 = 2 \wedge x_2 = -2$).

(Respuesta del estudiante, 2023).

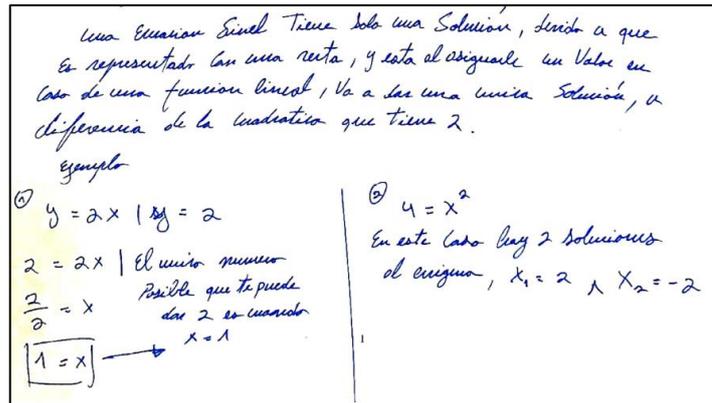


Figura 3 – Protocolo escrito por E23 sobre la solución de ecuación lineal con dos incógnitas
Fuente: elaborado por los autores

Por otro lado, los estudiantes que mostraron como concepción que la ecuación lineal con dos incógnitas tiene dos tipos de soluciones mencionaron dos de estas tres soluciones: infinitas, única o ninguna. Por ejemplo:

E22: una ecuación lineal puede tener solución única o infinitas soluciones, [argumentando que] puede existir uno o más conjuntos que permitan cumplir la igualdad.

E20: [manifestó que una ecuación lineal con dos incógnitas puede] tener infinitas soluciones o no tener solución, [escribiendo como ejemplo la ecuación $2x + 3y = 0$ para el caso de infinitas soluciones y la ecuación $x - y = x + y$ para ejemplificar que no tiene solución, aunque este último es incorrecto] (ver Figura 4).

(Respuestas de los estudiantes, 2023).

$$2x + 3y = 0 \rightarrow \text{puede tener infinitas soluciones}$$

$$x - y = x + y \rightarrow \text{no tiene solución}$$

Figura 4 – Protocolo escrito por E20 sobre la solución de ecuación lineal con dos incógnitas
Fuente: elaborado por los autores

4.3 Solución particular de un SEL

Todos los estudiantes que respondieron a la pregunta respecto a si $(0,1)$ es la solución particular de un SEL de 2×2 dado en la Tarea 2 (ver cuadro 1) coincidieron en que no es solución, lo que es correcto. En su argumento, identificamos dos concepciones: no es solución porque no satisface las ecuaciones del SEL o no es solución, pues al resolver el SEL se obtiene $(3, -1)$ como solución.

Los estudiantes que tienen la concepción que no es solución porque no satisface las ecuaciones del SEL verificaron que $(0, 1)$ es solución del SEL dado reemplazando $x = 0$ e $y = 1$ en cada una de sus ecuaciones, es decir, realizaron un proceso de verificación de si es solución a través de sustitución directa en las incógnitas. Por ejemplo, el estudiante E20 (ver Figura 5) reemplazó la incógnita x por 0 y la incógnita y por 1 en la primera ecuación del SEL ($x + y =$

2) y observó que $0+1$ es distinto de 2. Por consiguiente, E20 reemplazó la incógnita x por 0 y la incógnita y por 1 en la segunda ecuación del SEL ($x + 2y = 1$) y observó que $0 + 2$ es distinto de 1. De esta forma, concluyó que $(0,1)$:

E20: no es solución porque no satisface las igualdades.
(Respuesta del estudiante, 2023).

Figura 5 – Protocolo escrito por estudiante E20 sobre la solución particular de un SEL
Fuente: Elaborado por los autores

Los estudiantes que manifiestan la concepción que $(0,1)$ no es solución, pues al resolver el SEL se obtiene $(3, -1)$ como solución, resolvieron el SEL dado y compararon la solución que obtuvieron con el par ordenado $(0,1)$. Así, concluyeron que este último no era solución del SEL. Por ejemplo, el estudiante E11 (Figura 6) resolvió el SEL por el método de sustitución. De la primera ecuación del SEL de $2x+2y=2$ dado, E11 despejó una de las incógnitas ($x = 2 - y$) y la sustituyó en la segunda ecuación de este SEL, de esta forma, obtuvo una nueva ecuación con una incógnita ($2 - y + 2y = 1$). Por consiguiente, redujo términos semejantes y obtuvo un valor para la incógnita y ($y = -1$). Finalmente, E11 reemplazó el valor obtenido para la incógnita y en la primera ecuación y determinó un valor para la incógnita x ($x = 3$). Así, concluyó que $(0,1)$:

E11: no es solución pues al sustituir una ecuación en la otra se obtiene $(3,-1)$.
(Respuesta del estudiante, 2023).

Figura 6 – Protocolo escrito por estudiante E11 sobre la solución particular de un SEL
Fuente: Elaborado por los autores

Inferimos que los estudiantes que tienen la concepción que $(0,1)$ no es solución, pues al resolver el SEL se obtiene $(3, -1)$ como solución, asocian *solución* de un SEL con *resolverlo*. Esto se reafirma con lo señalado por el estudiante E19 que no respondió de forma escrita a esta pregunta y señaló que la omitió porque:

E19: se me olvidó cómo resolver el sistema de ecuaciones con dos incógnitas (Respuesta del estudiante, 2023).

4.4 Qué significa ser solución de un SEL

Ante la pregunta *¿qué significa ser una solución para un sistema de ecuaciones lineales?*, identificamos tres concepciones de los estudiantes: una solución para un SEL satisface todas

sus ecuaciones; una solución para un SEL es un punto que pertenece a las rectas y cumple con sus reglas de correspondencia o una solución para un SEL es el resultado de una de sus incógnitas.

La mayoría de los estudiantes respondió haciendo alusión a la concepción de que una solución para un SEL satisface todas sus ecuaciones, la cual es correcta. Por ejemplo, el estudiante E22 (ver Figura 7) escribió:

E22: la solución es un conjunto que satisface a todas las ecuaciones del sistema.
(Respuesta del estudiante, 2023).

Inferimos que los estudiantes que respondieron como el estudiante E22 conciben el concepto de solución de un de un SEL de 2×2 bajo un pensamiento analítico-aritmético, pues mencionan que la solución es aquella que satisface todas las ecuaciones del sistema.



Figura 7 – Protocolo escrito por estudiante E22 sobre lo que significa ser solución de un SEL
Fuente: Elaborado por los autores

Por otra parte, solo un estudiante manifestó la concepción de que una solución para un SEL es un punto que pertenece a las rectas y cumple con sus reglas de correspondencia. En concreto el estudiante E2 señaló:

E2: para mí significa que el punto en cuestión pertenece a las rectas, por lo que puede ser una intersección de estas, además de cumplir con sus reglas de correspondencia (Figura 8).
(Respuesta del estudiante, 2023).

De esto último, inferimos que E2 comprende el concepto desde los modos de pensamiento analítico-aritmético y sintético-geométrico.

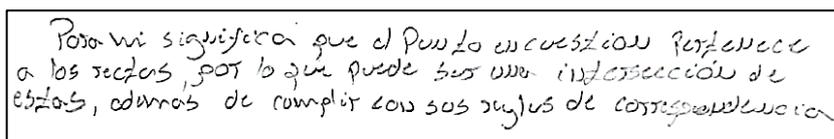


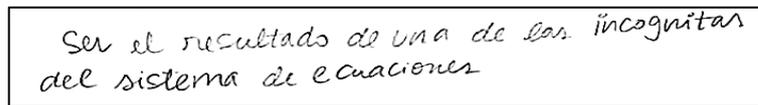
Figura 8 – Protocolo escrito por estudiante E2 sobre la solución de un SEL
Fuente: Elaborado por los autores

El estudiante E2 tiene una concepción geométrica (modo sintético-geométrico) de lo que significa ser solución de un SEL de 2×2 porque mencionó que el punto en cuestión pertenece a las rectas. Además, inferimos que E2 relaciona la solución de un SEL con su significado analítico porque señaló que el punto en cuestión (el punto que es solución) debe cumplir con sus reglas de correspondencia, es decir, con las ecuaciones de cada recta (modo analítico-aritmético).

Con respecto a la concepción de que una solución para un SEL es el resultado de una de sus incógnitas, por ejemplo, el estudiante E11 escribió que:

E11: ser una solución para un SEL es ser el resultado de una de las incógnitas del sistema de ecuaciones (Figura 9) (Respuesta del estudiante, 2023).

Se infiere que E11, al igual que lo hicieron algunos estudiantes al responder la pregunta sobre la solución particular de un SEL (sesión 4.3), asoció *solución* de un SEL con *resolver*, es decir, pareciera que no la comprende como un conjunto de números que satisface las ecuaciones.



Ser el resultado de una de las incógnitas del sistema de ecuaciones

Figura 9 – Protocolo escrito por estudiante E11 sobre la solución de un SEL
Fuente: Elaborado por los autores

4.5 Tipos de soluciones de un SEL de 2x2

A través de las respuestas de los estudiantes a la pregunta ¿Cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones lineales?, identificamos cuatro concepciones de los estudiantes sobre los tipos de soluciones de un SEL de 2×2 : un SEL puede tener tres tipos de soluciones (infinitas soluciones, solución única o no tiene soluciones), un SEL puede tener infinitas soluciones, un SEL puede tener solo una solución o un SEL puede tener dos soluciones.

Los estudiantes que tienen la concepción (correcta) de que un SEL puede tener tres tipos de soluciones (infinitas soluciones, solución única o no tiene soluciones) lo escribieron directamente. Por ejemplo:

E20: hay 3 tipos: infinitas soluciones, solución única o no tener soluciones.

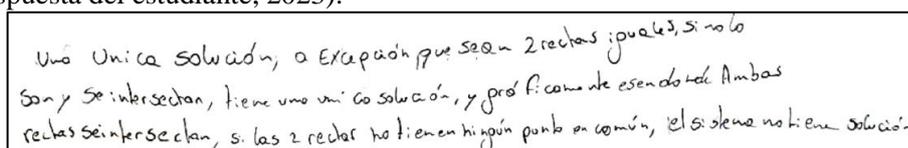
E22: Un SEL puede tener soluciones infinitas, una única solución o no tener soluciones (solución vacía).

(Respuestas de los estudiantes, 2023).

En tanto, el estudiante E6 mencionó los tipos de soluciones asociando cada una a su representación gráfica. En concreto:

E6: una única [sic] solución, a excepción que sean 2 rectas iguales, si no lo son y se intersectan [sic] tiene única [sic] solución y gráficamente es donde ambas rectas se intersectan [sic], si las 2 rectas no tienen ningún punto en común, el sistema no tiene solución (Figura 10).

(Respuesta del estudiante, 2023).



Una Única solución, a excepción que sean 2 rectas iguales, si no lo son y se intersectan, tiene una única solución, y gráficamente es donde ambas rectas se intersectan, si las 2 rectas no tienen ningún punto en común, el sistema no tiene solución

Figura 10 – Protocolo escrito por estudiante E6 sobre los tipos de solución de un SEL
Fuente: Elaborado por los autores

Aunque el estudiante E6 no escribió exactamente que un SEL tiene tres tipos de soluciones, inferimos que tiene esa concepción, ya que lo describió geométricamente. Creemos que pensó en un SEL de 2×2 , ya que habla de *dos rectas*. Luego, E6 mencionó lo que se lee

en el extracto anterior, pero no especificó el tipo de solución asociada a esta representación geométrica. Al preguntarle sobre el tipo de solución vinculada a 2 rectas iguales, señaló:

E6: infinitas soluciones. [Por último, E6 hizo referencia a la solución vacía al escribir] si las 2 rectas no tienen ningún punto en común el sistema no tiene solución.
(Respuesta del estudiante, 2023).

Desde los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000), observamos que E6 argumentó posicionado en el modo sintético-geométrico reconociendo la cantidad de soluciones de un SEL como los posibles puntos en común entre dos rectas.

Por otro lado, identificamos que la mayoría de los estudiantes tiene una concepción errónea sobre la cantidad de soluciones que puede tener un SEL. En sus respuestas, ellos mencionaron que un SEL tiene un tipo de solución, ya sea, infinitas soluciones, una única solución o dos soluciones.

Los estudiantes que escribieron que el SEL tenía infinitas soluciones dieron una justificación no coherente. Por ejemplo:

E24: [anotó que tenía] infinitas, ya que pueden satisfacer infinitas coordenadas al sist. de ecuaciones (Figura 11).
(Respuesta del estudiante, 2023).

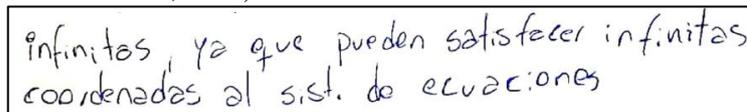


Figura 11 – Protocolo escrito por estudiante E24 sobre los tipos de solución de un SEL
Fuente: Elaborado por los autores

Por otro lado, los estudiantes que tienen la concepción de que un SEL tiene única solución es porque piensan en que un SEL (de 2×2) siempre tiene solución y conciben esa solución como el punto de intersección entre ambas rectas. Por ejemplo:

E7: tiene una solución que vendría siendo el punto donde las rectas se intersectan [sic] [y al respecto, expresó que] si no hay intersección, el sistema está malo [porque para él] el sistema es para encontrar la intersección de las rectas: lo que hice fue dibujar dos rectas, marcar el punto y decir que eso es lo que representa, el punto de intersección de las dos rectas.

D: ¿y para todos los sistemas de ecuaciones lineales, crees que se va a dar de esa forma?

E7: No. Puede haber un caso en el que el sistema esté malo y quizás no se intersecan.

D: ¿Por qué crees que está malo?

E7: Porque al final el sistema es para encontrar la intersección de las rectas.

(Diálogo entre el docente y el estudiante E7, 2023).

Inferimos que el estudiante E7 tiene esta concepción influenciada por experiencias previas, es decir, puede ser que los SEL con los que trabajó previamente siempre tenían una solución, la intersección de las rectas, y lo interiorizó como esa única posibilidad, sin pensar en el caso de rectas paralelas o coincidentes.

Los estudiantes que tienen como concepción que el SEL tiene dos soluciones es porque conciben al valor de x como una solución y al valor de y como otra. Por ejemplo, veamos el argumento de uno de los estudiantes:

E5: depende de cuantas incógnitas tenga este, pero si es de 2×2 este tiene 2 soluciones.
(Respuesta del estudiante, 2023).

Al preguntarle a E5 sobre su respuesta, él argumentó que al resolver el SEL tiene que dar dos valores distintos y lo ejemplificó resolviendo el SEL de 2×2 de la Tarea 2:

E5: En este caso, puede tener dos porque al resolver el sistema te da... te tiene que dar dos valores distintos.

D: Pero ¿podrías escribirme estas dos soluciones para este sistema de ecuaciones lineales (Docente le indica el SEL de ecuaciones dado en la tarea 2 pregunta 1(poner ecuaciones del SEL)?

E5: ¿Le resuelvo el sistema?

D: Sí.

[E5 resolvió el SEL indicado y escribió: $y=-1, x=1$]

E5: Estas serían las soluciones que tiene el sistema para mí (indicando, donde él escribió $y=-1, x=1$).

(Diálogo entre el docente y el estudiante E5, 2023).

En general, los estudiantes que manifestaron las concepciones erróneas respecto a la cantidad de soluciones que puede tener un SEL evidenciaron confusión en sus argumentos, ya sea presentados en modo analítico-aritmético o desde el modo sintético-geométrico.

4.6 Representación gráfica de un SEL de 3×2

En la tarea 3, los estudiantes usaron el software de geometría dinámica GeoGebra para graficar las ecuaciones de un SEL de 3×2 y observando su representación gráfica (ver Figura 12) responder a la pregunta: ¿cuántas soluciones tienen el sistema de ecuaciones lineales? Para esta interrogante, identificamos dos concepciones de los estudiantes: el SEL no tiene soluciones porque no hay un punto de intersección entre las rectas o el SEL tiene tres soluciones porque hay tres puntos de intersección.

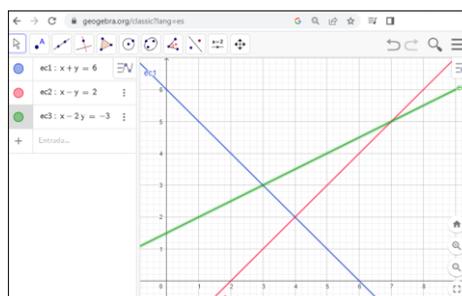


Figura 12 – Representación en GeoGebra de SEL de 3×2 de la Tarea 3

Fuente: Elaborado por los autores

La mayoría de los estudiantes tienen la concepción (correcta) de que el SEL de 3×2 dado *no tiene soluciones*. Por ejemplo:

E1: al observar en GeoGebra el sistema de ecuaciones, podemos analizar que no existe una solución, ya que, no hay un punto que intersecte[sic] las tres rectas.

E6: Ninguna, debido a que en ningún punto se intersecan [sic] las 3 rectas, la intersección representa el punto en el que se cumple la igualdad en las 3 ecuaciones a la vez, y este grafico [sic] no tiene ningún punto donde las 3 rectas se intersecan [sic].

(Respuestas de los estudiantes, 2023).

Al observar en geogebra el sistema de ecuaciones, podemos analizar que no existe una solución, ya que, no hay un punto que intersecte las tres rectas.

Figura 13 – Protocolo escrito por el estudiante E1 sobre la cantidad de soluciones que tiene el SEL de 3×2 dado
Fuente: Elaborado por los autores

Ninguna, debido a que en ningún punto se intersecan las 3 rectas, la intersección representa el punto en el que se cumple la igualdad en las 3 ecuaciones a la vez, y este grafico no tiene ningún punto donde las 3 rectas se intersecan.

Figura 14 – Protocolo escrito por el estudiante E6 sobre la cantidad de soluciones que tiene el SEL de 3×2 dado
Fuente: Elaborado por los autores

Inferimos que los estudiantes que conciben que *el SEL no tiene soluciones* muestran que comprenden el concepto de solución de un SEL cuando está representado en modo geométrico. En particular, los estudiantes son capaces de establecer una relación entre los puntos de las tres rectas involucradas (modo sintético-geométrico) y las soluciones de las ecuaciones correspondiente al SEL (modo analítico-aritmético). Además, pareciera que entienden la solución como un punto que debe pertenecer a todas las rectas o que debe satisfacer todas las ecuaciones a la vez.

Por otro lado, los estudiantes que tienen la concepción (errónea) de que *el SEL de 3×2 dado tiene solución* es porque visualizan 3 puntos de intersección en la gráfica. Por ejemplo:

E11: tiene 3 soluciones porque observan 3 puntos de intersección [pero no lo relacionó con el hecho de que la solución debe satisfacer todas las ecuaciones del SEL, es decir, pertenecer a las 3 rectas a la vez] (ver Figura 15) (Respuesta del estudiante, 2023).

Tiene tres soluciones, pues las rectas intersecan en tres puntos.

Figura 15 – Ejemplo de concepción incorrecta, protocolo escrito por E11 sobre la cantidad de soluciones que tiene el SEL de 3×2 dado
Fuente: Elaborado por los autores

Las concepciones de los estudiantes con respecto a esta tarea son totalmente opuestas a las reportadas en estudios preliminares. Cárcamo; Fuentealba y Tauler (2021) observaron que

el 87% de los estudiantes de su investigación tenían una concepción errada porque indicaron que el SEL tenía solución. En cambio, en nuestro estudio, la mayoría de los estudiantes (71%) respondió de manera correcta, pues indicaron que el SEL dado no tenía solución.

5 Conclusiones

El objetivo de esta investigación exploratoria era identificar las concepciones previas que tienen los estudiantes de primer año de universidad con respecto a los conceptos de ecuación lineal con dos incógnitas y SEL con dos incógnitas, antes de iniciar el estudio del contenido de SEL de $m \times n$ en el curso de Álgebra Lineal.

Con este estudio aportamos información tanto de las concepciones que los estudiantes tienen respecto a ecuación lineal con dos incógnitas como a SEL con dos incógnitas, abordando sus distintos tipos de solución (única, infinitas y vacía). Esto se diferencia de Cárcamo; Fuentealba y Tauler (2021) porque sus resultados únicamente aportan información sobre las concepciones que los estudiantes tienen acerca de SEL de 3×2 con solución vacía.

El análisis realizado mostró que existe una correlación entre las concepciones del estudiante sobre una ecuación lineal y un SEL. Específicamente, la mayoría de los estudiantes no comprende la cantidad de soluciones que tiene una ecuación lineal (ver Tabla 1), lo que se traduce en respuestas incorrectas o en blanco. De los estudiantes que respondieron erróneamente, algunos indicaron que tiene una única solución y otros, que tiene dos soluciones y argumentaron desde el modo de pensamiento analítico-aritmético (con ecuaciones o realizando un trabajo algebraico). Aunque estos mismos estudiantes, tienen la concepción de que una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano, no visualizaron las soluciones de dicha ecuación (modo analítico-aritmético) con su representación gráfica, es decir, con los infinitos puntos de recta (modo sintético-geométrico). Esto podría deberse al hecho de que al estudiante se le preguntó explícitamente por la cantidad de soluciones de una ecuación lineal y de un SEL. En este caso, no relacionaron el modo analítico-aritmético (los pares ordenados que satisfacen una ecuación lineal) con el modo sintético-geométrico (los infinitos puntos que pertenecen a la recta que representa dicha ecuación lineal).

De igual manera, la mayoría de los estudiantes tienen una concepción equivocada (o confusa) con respecto a la cantidad de soluciones que puede tener un SEL con dos incógnitas. En sus respuestas, mencionaron que un SEL tiene un tipo de solución, ya sea, infinitas soluciones, una única solución, o dos soluciones. Los estudiantes que indicaron que tiene infinitas (o dos soluciones) argumentaron desde el modo analítico-aritmético, mientras que los

estudiantes que tienen la concepción de que un SEL tiene una única solución justificaron desde el modo sintético-geométrico.

Por otra parte, la mayoría de los estudiantes involucrados en este estudio conciben correctamente el concepto de solución de un SEL de 2×2 bajo un pensamiento analítico-aritmético, pues mencionan que la solución es tal que *satisface a todas las ecuaciones del sistema*. Además, cuando se les pidió identificar la cantidad de soluciones de un SEL, a partir de la representación gráfica de un SEL de 3×2 , la mayoría de los estudiantes indicó correctamente que no tenía solución, a diferencia de lo reportado en investigaciones previas (Cárcamo; Fuentealba; Tauler, 2021; Oktaç, 2018) en donde la mayoría de los estudiantes de respondió de forma errónea señalando que un SEL de 3×2 tiene 3 soluciones.

Los resultados obtenidos revelan que predominan las concepciones erróneas en cuanto a la cantidad de soluciones que tiene una ecuación lineal y la cantidad de soluciones que puede tener un SEL con dos incógnitas. Esto se debe tener en cuenta al momento de planificar la enseñanza de los SEL, ya que de acuerdo con Oktaç (2018) las concepciones que tengan sobre las soluciones de una ecuación lineal influenciarán las concepciones que tengan para un SEL.

Aun cuando nos hemos enfocado en las concepciones previas predominantes con respecto a los conceptos de ecuación lineal con dos incógnitas y SEL con dos incógnitas, creemos importante considerar todos los casos que se pudieran dar, presentando especial atención a las concepciones erróneas que algunos estudiantes pudieran tener. Todas estas concepciones se deben tener en cuenta al momento de planificar el aprendizaje de un contenido más avanzado como, por ejemplo, progresar de un SEL con 2 incógnitas a estudiar un SEL con 3 o más incógnitas.

Por lo expuesto, creemos que antes de trabajar el contenido de SEL de $m \times n$ en el curso de Álgebra Lineal, es fundamental plantear actividades a los estudiantes que les permitan visualizar geoméricamente una ecuación lineal con dos incógnitas y una ecuación lineal con tres incógnitas, es decir, como una recta y un plano respectivamente. Además, estas actividades deben facilitarle la comprensión de las soluciones de una ecuación lineal como un par ordenado o una tripleta que satisface la ecuación y a su vez, visualizarlas como punto del plano o del espacio que pertenecen a la gráfica de dicha ecuación. Esto, con la finalidad de que los estudiantes observen que los valores x e y por separado no son dos soluciones de una ecuación lineal, sino que juntos forman un par ordenado que es una de las soluciones de dicha ecuación. En concreto, al visualizarlo geoméricamente, una solución será un punto y se tendrán infinitos de ellos.

Asimismo, consideramos crucial que en la planificación de la enseñanza de SEL de $m \times n$ se aborde la visualización de los tres tipos de soluciones que estos pueden tener y así, no se limite al caso de $m \times 2$. La visualización geométrica de las infinitas soluciones de un SEL de 2×2 (rectas coincidentes) puede resultar compleja, por eso creemos que un SEL de 2×3 (intersección de dos planos) facilitaría la visualización de este tipo de solución. Para esto, sugerimos diseñar actividades con un applet donde se pueda observar la representación analítica y geométrica de un SEL e incluso su conjunto solución. Lo anterior, con la finalidad de permitir al estudiante visualizar los tipos de conjunto solución que puede tener un SEL para ayudar a su comprensión.

El propósito de las actividades de aprendizaje sugeridas es contribuir a que los estudiantes transiten entre el modo sintético-geométrico y el analítico-aritmético, fomentando así el desarrollo del modo analítico-estructural. El pensar el concepto de SEL y su solución en diferentes modos permitirá a los estudiantes internalizarlos y adquirir una comprensión más profunda de ellos (Ochoviet, 2009).

Los resultados de este estudio servirán como insumo para la planificación de la enseñanza y la anticipación de un posible proceso de aprendizaje de estudiantes para el contenido de SEL de $m \times n$. En concreto, se pueden usar para diseñar una trayectoria hipotética de aprendizaje para favorecer la construcción de SEL de $m \times n$ en el nivel universitario.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Referencias

ANDREWS-LARSON, C. Roots of linear algebra: An historical exploration of linear systems. *Primus*, Philadelphia, v. 25, n. 2, p.507-528, jul. 2015.

AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H. *Psicología Educativa*. Un punto de vista cognitivo. Ciudad de México: Trillas, 1983.

BISQUERRA, R. Metodología de la investigación educativa. 2. ed. Madrid: La Muralla, 2009.

CAMPOS, S. **Desde el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y 3×2 hasta algunos conceptos básicos del Álgebra Lineal**. 2017. 94. Tesis (Magíster en Didáctica de la Matemática) - Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, 2017.

CAMPANARIO, J. M.; OTERO, J. Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de Ciencias. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 18, n. 2, p.155-169, 2000.

CÁRCAMO, A.; FUENTEALBA, C.; TAULER, F. Concepciones sobre sistemas de ecuaciones lineales de 3×2 con solución vacía: un estudio exploratorio con estudiantes universitarios. **Formación universitaria**, La Serena, v.14, n.1, p.217-224, 2021.

CASTRO, A.; PRAT, M.; GORGORÍO, N. Concepciones sobre la adición y la sustracción en un grado de Educación Primaria. En MUÑOZ-ESCOLANO, J. M.; ARNAL-BAILERA, A.; BELTRÁN-PELLICER, P.; CALLEJO, M. L; CARRILLO, J. (eds.), **Investigación en Educación Matemática XXI**. Zaragoza: SEIEM, 2017. p. 187-196.

FRESNO, C.; TORRES, C.; ÁVILA, J. **Matemática 1º Medio**. Providencia, Santiago (Chile): Santillana del Pacífico S.A., 2020.

GÓMEZ, B. Concepciones de los números decimales. **Revista de investigación en educación**, Pontevedra, v. 8, n. 1, p. 97-107, 2010.

MARTÍNEZ SILVA, M.; GORGORÍO, N. Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. **Revista Electrónica de Investigación Educativa**, Baja California, v.6, n.1, p. 01-19, 2004.

MUTAMBARA, L.; BANSILAL, S. A case study of in-service teachers' errors and misconceptions in linear combinations. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 53, n.11, p. 2900-2918, 2022.

OCHOVIET, C. **Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas**. 2009. 291. Tesis (Doctorado en Matemática Educativa) - Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, Montevideo, 2009.

OKTAÇ, A. Conceptions about system of linear equations and solution. *In*: STEWART, S.; ANDREWS-LARSON, C.; BERMAN, A.; ZANDIEH, M. (eds.), **Challenges and strategies in teaching linear algebra**: ICME-13 Monographs. Cham: Springer, 2018. p. 71-101.

OKTAÇ, A.; TRIGUEROS, M. ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 13, n. 4, p. 373-385, 2010.

OLMEDO, N.; GALINDEZ, M. Algunas concepciones de alumnos que ingresan a la FACEN acerca del estudio de las ecuaciones. **Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología**, Catamarca, v. 5, n. 2, p. 109-130, 2014.

RÍOS-CUESTA, W.; ASPRILLA-MENA, O. H. Errores asociados a operaciones aditivas con fracciones: Un estudio exploratorio con estudiantes de secundaria. **Revista Boletín Redipe**, Cali, v. 11, n. 11, p. 86-98, 2022

RIVERA, M.; DOLORES, C. Preconcepciones de pendiente en estudiantes de Educación Secundaria. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 39, n. 1, p. 195-217, 2021.

RODRÍGUEZ, M.; MENA, A.; MENA, J.; VÁSQUEZ, P.; DEL VALLE, M. Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 37, n. 1, p. 71-92, 2019.



SIERPINSKA, A. On some aspects of students' thinking in linear algebra. *In*: DORIER, J.L. (ed.). **On the teaching of linear algebra**. Dordrecht: Springer, 2000, p. 209-246.

TRIGUEROS, M.; WAWRO, M. Linear Algebra Teaching and Learning. *In*: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Cham: Springer, 2020. p. 474-478.

Submetido em 15 de Julho de 2023.
Aprovado em 26 de Janeiro de 2024.