Formación Universitaria
Vol. 16(1), 77-86 (2023)
http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062023000100077

Identificando una progresión de aprendizaje para un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones

Andrea D. Cárcamo[1], Josep M. Fortuny[2] y Claudio E. Fuentealba[1]
(1) Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería, Universidad Austral de Chile, Valdivia-Chile (correo-e: andrea.carcamo@uach.cl; cfuentealba@uach.cl)
(2) Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona, Cerdanyola del Vallès-España.
(correo-e: JosepMaria.Fortuny@uab.cat)

Recibido Ago. 10, 2022; Aceptado Sep. 9, 2022; Versión final Oct. 3, 2022, Publicado Feb. 2023

Resumen

En esta investigación exploratoria, se caracteriza el razonamiento de estudiantes de primer año de ingeniería cuando determinan que un sistema de ecuaciones lineales (SEL) tiene como conjunto solución infinitas. Los estudiantes resuelven tareas de aprendizaje que forman parte de una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) sobre resolución de SEL. Esta THA es diseñada en términos del mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto y la heurística de diseño de los modelos emergentes. Los resultados muestran que el conjunto solución de un SEL que posee infinitas soluciones no es fácil de representar para los estudiantes porque no es inmediato ni intuitivo de construir, a diferencia del conjunto solución de un SEL que tiene solución única o vacía. Se concluye que la caracterización del razonamiento de los estudiantes cuando determinan que un SEL tiene infinitas soluciones es una herramienta que puede ser considerada para planificar este contenido matemático.

Palabras clave: sistemas de ecuaciones lineales; álgebra lineal; estudiantes universitarios; razonamiento de los estudiantes; infinitas soluciones

Identifying learning progression for a system of linear equations with infinite solutions

Abstract

This exploratory research study characterizes the reasoning of first-year engineering students when they determine that a system of linear equations (SLE) has an infinite solution. Students solve learning tasks that are part of a hypothetical learning trajectory (HLT) on solving SLE. The HLT is designed in terms of the mechanism of reflection on activity-effect relationships and on the design heuristic of the emergent models. The results show that solving a SEL with infinite solutions is not easy to represent for students since the solution is not immediate nor intuitive. This is unlike a SEL that has a unique or empty solution. It is concluded that characterizing student reasoning when determining that a SEL has infinite solutions is a useful tool to be considered for planning math content.

Keywords: systems of linear equations; linear algebra; university students; student reasoning; infinite solutions

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales (SELs) se consideran importantes principalmente por dos razones: sus diversas aplicaciones tanto en el campo de la ingeniería como de las ciencias sociales y su importancia como contenido matemático para estudios posteriores en matemáticas, como, por ejemplo, para el curso de Álgebra Lineal. A pesar de esto, los SELs no han sido estudiados ampliamente por los educadores en matemáticas (Oktaç, 2018). Existen estudios recientes sobre SELs. Por ejemplo, Cárcamo et al. (2021) identificaron las concepciones que muestran estudiantes universitarios de primer año al enfrentarse a preguntas que implican resolver SELs de 3*x*2 con solución vacía. Estos autores concluyeron que los estudiantes presentan concepciones erróneas al resolver este tipo de SEL porque no comprenden el significado de la solución de un SEL.

Por su parte, considerando que los estudiantes de educación superior muestran dificultades relacionadas con SELs debido a prácticas de enseñanza dominadas por procedimientos, Henriques y Martins (2022) hacen un experimento de enseñanza con unas tareas de investigación que involucran SELs en donde analizaron el razonamiento matemático de futuros profesores de matemática. Estas tareas, de diferente naturaleza a las que comúnmente utilizan en las clases de matemáticas de educación superior, instaba a los estudiantes a experimentar diversos procesos con el objetivo de desarrollar su comprensión de los conceptos y procedimientos de los SELs. Sus resultados dieron evidencias de que los futuros profesores evolucionaron positivamente en su comprensión y capacidad de razonamiento matemático, así como en su aprendizaje de SELs.

Por otra parte, Smith et al. (2022) puntualizan que se requiere más investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de SELs sin soluciones o con infinitas soluciones, ya que sus resoluciones tienden a ser menos intuitivas para los estudiantes. Al respecto, Huntley et al. (2007) y Oktaç (2018) afirman que el SEL que no tiene solución o que tiene infinitas soluciones, a menudo, se analiza como casos no estándar. Generalmente, la enseñanza pone en primer plano métodos de resolución (como la eliminación de variables) focalizados en casos de SELs que poseen solución única, lo que puede hacer que los estudiantes conciban las soluciones únicas como las soluciones usuales de los SELs. Además, Trigueros (2018) señala que para muchos estudiantes es difícil de interpretar el conjunto solución de un sistema de ecuación lineal (SEL) y que incluso, esta dificultad se vuelve más difícil de superar cuando todas las incógnitas del SEL no son explícitas en todas las ecuaciones.

Considerando lo expuesto, el objetivo de esta investigación exploratoria es caracterizar el progreso en el razonamiento de estudiantes de primer año de universidad cuando determinan que un SEL tiene infinitas soluciones a través del rango de la matriz de coeficientes, el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas del SEL.Consideramos que esta investigación es relevante porque contribuye a la investigación sobre el aprendizaje y enseñanza de SELs con infinitas soluciones en el nivel universitario. También, aporta a la práctica docente porque entrega una visión del pensamiento de los estudiantes cuando ellos determinan que un SEL tiene como conjunto solución infinitas y una secuencia de tareas para apoyar la construcción de este contenido de Álgebra Lineal y que, adaptada a otro contexto, puede resultar efectiva.

OTROS ANTECEDENTES

Los fundamentos teóricos de nuestra investigación corresponden al mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto (Simon et al., 2004) y la heurística del diseño instruccional de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999). Ambos enfoques son cognitivos y se interesan por reconstruir el pensamiento del estudiante cuando construye un cierto contenido matemático. Estos enfoques teóricos, los utilizamos para analizar los datos recopilados con la finalidad de reconstruir y caracterizar el razonamiento de los estudiantes. Además, la heurística del diseño instruccional de los modelos emergentes, la usamos para seleccionar (o diseñar) tareas apropiadas para nuestro estudio.

El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto

El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto involucra tres términos: actividad, meta y efecto. La actividad se refiere a los procesos mentales que generan una acción (que se puede observar o no) de los estudiantes y generalmente, consiste en una secuencia coordinada de acciones mentales. Un observador solo puede inferir la actividad mental sobre la base de las acciones o a través del lenguaje del estudiante. En tanto, la meta se refiere al estado deseado por el cual los estudiantes inician una actividad. Una meta sirve como un estado de referencia anticipado que estructura el foco de atención de los alumnos, qué efectos notan, y sirve como base para juzgar hasta qué punto una actividad tuvo éxito (Tzur y Simon, 2004).

El efecto se refiere a cualquier parte de la experiencia de los estudiantes que identifican como la que sigue a la actividad, como imágenes internas de objetos físicos, actividades u otras relaciones de actividad-efecto. El punto esencial con respecto al constructo teórico del "efecto" es que el aprendizaje procede a través de la distinción de un efecto del objetivo hacia el cual se dirigió una actividad en primer lugar (Tzur, 2007). El efecto se refiere a fragmentos de experiencia que los estudiantes aíslan como resultado de su actividad. Su atención a los efectos particulares se basa en sus objetivos y concepciones anteriores (Tzur y Simon, 2004).

Al describir el mecanismo, enfatizamos cómo la actividad dirigida por la meta de los estudiantes y sus efectos (como lo notaron los estudiantes) sirven como base para la formación de una nueva concepción (Tzur et al., 2004). Para alcanzar sus objetivos, los alumnos seleccionan e implementan una actividad (o secuencia de actividades) de las que tienen disponibles. Al llevar a cabo estas actividades, los sistemas mentales de los alumnos permiten el monitoreo continuo, incluida la distinción de los efectos de la actividad que promueven los objetivos, de los efectos que no los promueven. El sistema mental almacena registros de cada ejecución de la actividad vinculada al efecto de esa ejecución. A su vez, los alumnos reflexionan (no necesariamente conscientemente) sobre estos registros de experiencia e identifican patrones de relación entre la actividad y sus efectos. Este proceso de reflexión da como resultado la abstracción de los alumnos de una nueva relación de actividad-efecto, que constituye la base de una concepción que es más avanzada que las concepciones disponibles desde el principio (Tzur y Simon, 2004). En la Figura 1 se presenta un esquema que resume el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto.

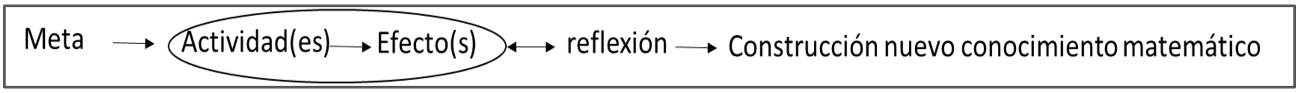

Fig. 1: Esquema que resume el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto

La heurística del diseño instruccional de los modelos emergentes

La heurística del diseño instruccional de los modelos emergentes es una de las tres heurísticas del diseño instruccional con las que se puede caracterizar la teoría de la Educación Matemática Realista. Esta busca crear trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THAs) que permitan a los estudiantes desarrollar *modelos-de* actividad matemática informal que luego se conviertan en *modelos-para* su razonamiento matemático más sofisticado (Gravemeijer, 2004). Para la progresión de un *modelo-de* actividad matemática informal a un *modelo-para* el razonamiento matemático formal, Gravemeijer (1999) establece cuatro niveles de actividad: situacional (interpretación y solución del problema contextual en un escenario particular), referencial (involucra modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que abordan el problema de la actividad situacional), general (involucra exploración, reflexión y generalización de lo que se vio en el nivel anterior, pero con un enfoque matemático en la estrategia y sin hacer referencia al problema inicial), y formal (involucra trabajar con métodos y notaciones convencionales).

La heurística del diseño instruccional de los modelos emergentes tiene como objetivo apoyar un proceso incremental en el que los modelos y las concepciones matemáticas evolucionen al mismo tiempo. El elemento central de esta heurística es el uso de una serie de submodelos, que juntos fundamentan un modelo general. Este modelo general se desarrolla a partir de un *modelo-de* actividad matemática informal a un *modelo-para* un razonamiento matemático más formal. Además, uno de los elementos centrales de los modelos emergentes es que los modelos no aparecen de la nada, sino que surgen del modelado de situaciones que tienen sentido para los estudiantes (Gravemeijer, 2020).

El término *modelo* debe entenderse en un sentido amplio. No es solo la representación física, sino todo lo que viene con este (es decir, actividad y propósito) y que constituye el modelo (Cobb, 1999). La idea es que, durante las actividades de los estudiantes, el modelo y la situación que se modele coevolucionen. El modelado desde esta perspectiva es un proceso de reorganización tanto de actividades como de situaciones. La situación llega a estructurarse en términos de conceptos y relaciones matemáticas. Asimismo, la etiqueta *emergente* se refiere tanto al carácter del proceso por el cual emergen los modelos dentro de la Educación Matemática Realista, como al proceso por el cual estos modelos apoyan el surgimiento de formas matemáticas formales de conocimiento (Doorman y Gravemeijer, 2009).

METODOLOGÍA

Nuestro estudio es de carácter cualitativo (Bikner-Ahsbahs et al., 2015) y exploratorio. La metodología de investigación es la investigación basada en el diseño que tiene el potencial de superar la brecha entre la práctica educativa y la teoría. En particular, la investigación basada en el diseño se centra en desarrollar teorías del aprendizaje en un dominio específico y en los medios diseñados con el objeto de apoyar el aprendizaje (Bakker y van Eerde, 2015).

A continuación, presentamos el diseño metodológico de nuestra investigación exploratorio que lo hemos dividido en tres subsecciones. En la primera subsección, describimos los participantes y el contexto de nuestro estudio. En la segunda subsección, presentamos y describimos las características de las tareas de la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) diseñada ad-hoc. Estas tareas se aplicaron en un primer ciclo de experimento de enseñanza (Bakker, 2018). Finalmente, en la tercera subsección, describimos cómo recopilamos y efectuamos el análisis de los datos de esta investigación.

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación fueron 45 estudiantes de ingeniería que cursaban primer año en la universidad. Estos estudiantes participaron en un experimento de enseñanza en el que una THA fue utilizada por el docente para apoyar la construcción sobre la resolución de SELs de *mxn*. La THA consta de tres componentes: un objetivo de aprendizaje, un conjunto de tareas de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético mediante el cual los estudiantes pueden transitar de sus conocimientos previos a un nuevo conocimiento matemático (Simon, 1995). Los participantes habían estudiado previamente SELs de 2*x*2, rango de una matriz, matriz de coeficientes, matriz ampliada y matriz escalonada por fila. Por otra parte, los estudiantes se agruparon en grupos pequeños (2 a 3 estudiantes) para resolver las tareas de la THA. El papel del docente fue de guía para los estudiantes durante las sesiones de clase, aclarando dudas y moderando una puesta en común al final de cada sesión.

Características de las tareas

En este artículo nos centramos en el proceso de aprendizaje sobre identificar cuándo un SEL tiene como conjunto solución infinitas a través del rango de la matriz de coeficientes, el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas de un SEL dado. Para ello, consideramos la resolución de los estudiantes de cuatro tareas de aprendizaje de la THA usada en el experimento de enseñanza y que se vinculan a los niveles de actividad de la heurística de diseño de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999). En este estudio, nos enfocamos en conocer cómo estos niveles de actividad pueden manifestarse en los estudiantes cuando resuelven estas cuatro tareas de aprendizaje. La Tabla 1 resume estas tareas de aprendizaje y cómo se espera que los estudiantes manifiesten sus niveles de actividad en cada una de estas.

Tabla 1: Resumen de las cuatro tareas de la THA y cómo se espera que los estudiantes manifiesten sus niveles de actividad en cada una de estas tareas

Principales características de las tareas	Manifestación de los niveles de actividad
Tarea 1: Juan es estudiante de ingeniería de primer año. Él obtuvo un total de 250 puntos en sus tres pruebas de álgebra lineal. Su puntaje en su prueba uno supera en dos puntos la puntuación de su segunda prueba. Juan sabe que el doble de la puntuación de su primera prueba más la puntuación de su tercera prueba, exceden en dos puntos a su puntaje total. Sin embargo, Juan no sabe la puntuación de cada una de sus tres pruebas y quiere saberlas. Con esta información, ¿puedes ayudar a Juan a calcular los puntajes individuales de sus tres pruebas?	Actividad situacional. Los estudiantes comienzan la construcción de determinar cuándo un SEL tiene un conjunto de soluciones infinitas en el contexto de las pruebas de álgebra lineal. Los estudiantes usan sus conocimientos sobre SELs de 3*x*2, rango de una matriz, matriz de coeficientes, matriz ampliada y matriz escalonada por fila para determinar si pueden ayudar a Juan a conocer sus puntajes obtenidos en sus tres pruebas de álgebra lineal.
Tarea 2: conjeturar la relación que existe entre el rango de la matriz de los coeficientes *A*, el rango de la matriz ampliada *A*|*B*, el número de incógnitas del SEL asociado a Juan y el conjunto solución del SEL asociado a Juan.	Actividad referencial. Los estudiantes calculan el rango de la matriz de los coeficientes, el rango de la matriz ampliada que corresponden a la matriz escalonada por filas del SEL asociado a Juan y, además, considerando el número de incógnitas de este SEL, los estudiantes conjeturan que, si los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada son iguales, pero menor al número de incógnitas del SEL, entonces el SEL tiene infinitas soluciones. Las características del SEL de Juan (rangos iguales de las matrices de coeficientes y matriz ampliada, pero menores al número de incógnitas, el tipo de solución del SEL: infinitas) orienta a los estudiantes a identificar cuando un SEL de 2*x*2 posee infinitas soluciones y funciona como *modelo-de* un SEL de 2*x*2 que tiene infinitas soluciones y, además, de los conocimientos previos de los estudiantes.
Tarea 3: Determinar el conjunto solución de SELs con igual número de ecuaciones que de incógnitas de forma matricial.	Actividad general. Los estudiantes exploran y reflexionan sobre SELs que poseen como conjunto solución infinitas y que no están vinculados al contexto de las pruebas de álgebra lineal. Las características del SEL de Juan (rangos iguales de las matrices de coeficientes y matriz ampliada y menores al número de incógnitas, el tipo de solución: infinitas) funciona como *modelo-para* razonar sobre las características de los SELs de *mxm* que tienen como conjunto solución infinitas.
Tarea 4: Determinar el conjunto solución de SELs con diferente número de ecuaciones lineales y de incógnitas.	Actividad formal. Los estudiantes trabajan con SEL que difieren de los presentados en los niveles anteriores, y los resuelven identificando, a través de los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada, así como el número de incógnitas, cuando un SEL tiene como conjunto solución infinitas.

Las tareas de aprendizaje presentadas en la Tabla 1 fueron diseñadas en función de la heurística de diseño de los modelos emergentes y en particular, en términos de los niveles de actividad que presenta este. Solo la tarea 1 se diseñó considerando la propuesta de Engler et al. (2001). Estas tareas fueron validadas por tres expertos en el área de didáctica de la matemática y tres docentes del curso de Álgebra Lineal a nivel universitario.

Recogida y análisis de datos

En este estudio exploratorio, los datos recopilados fueron los siguientes: los protocolos escritos de los estudiantes sobre las cuatro tareas de aprendizaje de la THA, las grabaciones de audio y video del trabajo en grupos pequeños realizado por los estudiantes. Para el análisis de los datos, transcribimos las comunicaciones orales de las sesiones de clase en donde se aplicaron las tareas de la THA diseñada para esta investigación. Consideramos como unidad de análisis cada una de las declaraciones (orales o escritas) de los estudiantes. Luego, identificamos en las unidades de análisis los niveles de actividad de la heurística de diseño de los modelos emergentes. Para asegurar la validez y fiabilidad del análisis, los investigadores codificaron por separado los datos y discutieron sus discrepancias. Esto nos permitió caracterizar el razonamiento de estudiantes de primer año de universidad cuando identifican que un SEL tiene como infinitas soluciones a través del rango de la matriz de coeficientes, el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas del SEL.

RESULTADOS

En esta sección, caracterizamos el razonamiento de dos estudiantes cuando determinan que un SEL tiene como infinitas soluciones. En particular, caracterizamos la progresión del razonamiento de los estudiantes a través de los niveles de actividad de la heurística de los modelos emergentes (del *modelo-de* al *modelo-para*) y, además, por medio del mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto.

Actividad situacional

El nivel de actividad situacional implica que los estudiantes trabajen hacia objetivos matemáticos en un entorno experiencial para ellos. En este caso, el contexto correspondió al puntaje de pruebas de álgebra lineal (tarea 1) y los SEL de 2*x*2 (conocimiento previo de los estudiantes) que sirvieron como el entorno experiencial para que los estudiantes trabajaran hacia su objetivo de identificar cuando un SEL tiene infinitas soluciones.

En la tarea 1, a los estudiantes se les pregunta si con la información que se les entrega, ellos pueden ayudar a Juan a calcular los puntajes de cada una de sus tres pruebas de álgebra lineal. Para dar respuesta a lo anterior, Ana y Andrew leyeron detenidamente la información que se les entregó y la representaron adecuadamente en lenguaje matemático. Primero, identificaron que había tres incógnitas (los puntajes de cada una de las tres pruebas parciales de álgebra lineal de Juan) a las cuales le designaron las letras *x*, *y* y *z* (respectivamente). Luego, usaron sus conocimientos previos de ecuaciones lineales con los que formaron tres ecuaciones lineales que contenían estas incógnitas. Finalmente, usando sus conocimientos previos de SEL de 2*x*2 formaron un SEL con las tres ecuaciones lineales (ver Figura 2).

Ana	Andrew
$x - y = 2$	$x + y + z = 250$
$x + y + z = 250$	$x - y = 2$
$2x + z = 252$	$2x + z = 252$

Fig. 2: SEL asociado a la situación de Juan escrito por Ana y Andrew

A continuación, Ana y Andrew usaron su conocimiento previo de matriz ampliada vinculada a un SEL para representar, en una matriz ampliada los coeficientes del SEL asociado a la situación de Juan. Esto se evidenció cuando Andrew le dijo a Ana que para resolver el SEL (asociado a Juan) "*tenemos que escribir los coeficientes del sistema de ecuaciones en una matriz ampliada*". Ellos escribieron la matriz ampliada asociada al SEL de Juan. Luego, Ana le indicó a Andrew que "hay que escalonar la matriz ampliada". Ambos estudiantes utilizaron su conocimiento previo de operaciones elementales filas y matriz escalonada por filas para escalonar la matriz ampliada correspondiente al SEL de Juan. En la Figura 3, se ejemplifica este proceso con lo que escribió Ana en su protocolo escrito.Después, Ana le preguntó a Andrew si él obtuvo el mismo SEL equivalente que ella al escalonar la matriz ampliada (Figura 4). Ana supuso que escalonó mal la matriz ampliada vinculada al SEL porque pensó que el SEL equivalente que obtuvo no tenía solución: "yo creo que escaloné mal la matriz ampliada porque no tengo solución".

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 250 \\ 2 & 0 & 1 & 252 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{2+(-1)1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \\ 2 & 0 & 1 & 252 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+(-2)1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+(-1)2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 248 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Fig. 3: Procedimiento realizado por Ana para obtener la matriz escalonada por filas del SEL asociado a Juan

Sin embargo, Andrew le dijo "*yo tengo el mismo sistema de ecuaciones. Tiene infinitas soluciones. Tú tienes que despejar las incógnitas x y z en términos de la incógnita y para ir obteniendo las soluciones*". Inmediatamente, Ana le preguntó a Andrew "*¿por qué tiene infinitas soluciones?*". Andrew le señaló que la incógnita y puede tomar infinitos valores, por lo tanto, "*dependiendo del valor que le des a y vas a tener los valores para x y z*". Ana consideró lo que le dijo Andrew porque ella concluyó que el SEL tenía como "soluciones posibles infinitas" (ver Figura 4). El efecto de esta actividad es que los estudiantes determinaron que cada incógnita del SEL asociado a la situación de Juan podía tomar cualquier valor numérico. Este efecto ha sido reconocido, inmediatamente, por Andrew mientras que Ana necesitó de la explicación de Andrew para interpretar el SEL equivalente.

$$\boxed{\left.\begin{array}{r|} x+y=2 \\ 2y+z=248 \end{array} \quad ? \quad \right\} \text{Soluciones posibles infinitas}}$$

Fig. 4: SEL equivalente de la situación de Juan y la interpretación dada por Ana

Conjeturamos que la reflexión de los estudiantes sobre su experiencia con respecto a la situación de Juan les permitió inferir la relación abstracta de que el SEL vinculado a la situación de Juan tiene infinitas soluciones. Por esta razón, Ana y Andrew escribieron que no podían ayudar a Juan a determinar con exactitud los puntajes de cada una de sus pruebas parciales.

Actividad referencial

En la actividad referencial, el SEL equivalente asociado a Juan funcionó para los estudiantes como un *modelo-de* un SEL de 2*x*2 que tiene infinitas soluciones (el SEL de 2*x*2 tiene como soluciones infinitas cuando los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, asociadas al SEL, son iguales, pero menores al número de incógnitas del SEL). En la tarea 2, se les pidió a los estudiantes que conjeturaran la relación que existe entre el rango de la matriz de los coeficientes, el rango de la matriz ampliada, el número de incógnitas y el conjunto solución del SEL asociado a Juan. En esta tarea, los estudiantes dieron evidencia de que progresaron hacia el nivel de actividad referencial porque ellos calcularon el rango de la matriz de los coeficientes, así como el rango de la matriz ampliada de la matriz escalonada por filas del SEL asociado a Juan de la tarea 1. Con esta información junto con el número de incógnitas y el tipo de solución asociada al SEL de Juan, los estudiantes respondieron correctamente a la tarea 2 (ver Tabla 2).

Para resolver la tarea 2, Ana y Andrew usaron la regularidad que abstrajeron en la tarea 1 con respecto a identificar cuando un SEL tiene infinitas soluciones. Además, ambos utilizaron la matriz ampliada y la matriz escalonada asociada al SEL de la situación de Juan junto a su conocimiento de rango de una matriz para establecer el rango tanto de la matriz ampliada como de la matriz de coeficientes vinculadas al SEL correspondiente a Juan. Inferimos que los estudiantes determinaron como efecto de la actividad anterior que los rangos de la matriz ampliada y de la matriz de coeficientes, asociadas al SEL de la situación de Juan, son iguales a dos, pero diferente al número de incógnitas de dicho SEL (tres incógnitas). Reflexionando sobre su experiencia en relación con la tarea 2, conjeturamos que los estudiantes abstrajeron una relación entre su actividad asociada a la situación de Juan y su efecto de esta. Dicha relación, como se muestra en la Tabla 2 consiste en que, si el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada son iguales, pero menor al número de incógnitas del SEL entonces el SEL tiene infinitas soluciones. Además, Ana reforzó su afirmación de que el SEL tenía infinitas soluciones al escribir que a *las incógnitas puedo asignarle cualquier valor.*

Tabla 2: Respuestas de los estudiantes Ana y Andrew a la tarea 2

Respuesta de Ana*: Podemos ver que los rangos son iguales y menores al Nº de incógnitas. A las incógnitas puedo asignarle cualquier valor. Por lo tanto, este sistema tiene infinitas soluciones.*
Respuesta de Andrew*: Cuando el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada son iguales y menor al número de incógnitas del sistema de ecuaciones entonces el sistema tiene infinitas soluciones.*

En los niveles de actividad situacional y referencial, el trabajo matemático de los estudiantes implicó representar un SEL de 3*x*3 de forma analítica y conjeturar cuando un SEL de 2*x*2 tiene infinitas soluciones al observar los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada del SEL, y el número de incógnitas del mismo. A continuación, en el nivel de actividad general, hay un cambio de representar y conjeturar a usar SELs de 2*x*2 que tienen infinitas soluciones como herramientas. En particular, las características del SEL de 2*x*2 asociado a Juan funcionó como *modelo-para* razonar sobre las características de los SELs de *m*x*m* que tienen como conjunto solución infinitas.

Actividad general

En la tarea 3, los estudiantes resolvieron matricialmente SEL de *m*x*m* que tenían infinitas soluciones. Ana y Andrew dieron indicios de progresar hacia el nivel de actividad general porque resolvieron SELs de *mxm* e inmediatamente, reflexionaron sobre SELs que poseen como conjunto solución infinitas y que no se refieren al contexto de la tarea 1. Por ejemplo, los estudiantes resolvieron un SEL de 3x3 con incógnitas *x*, *y* y *z* formado por las siguientes ecuaciones lineales: *x*+*y*-2*z*=9, 2*x*-*y*+4*z*=4 y 4*x*-2*y*+8*z*=8. En la Figura 5, observamos la resolución escrita de Andrew para este SEL. Él resolvió el SEL matricialmente y usó la regularidad abstraída en la tarea 2 sobre los rangos de las matrices vinculadas a la matriz escalonada por filas del SEL (matriz de coeficientes y matriz ampliada) y el número de incógnitas del SEL para determinar que tenía infinitas soluciones. A continuación, Andrew escribió el conjunto solución del SEL indicando la solución para cada una de las incógnitas de este. Por lo tanto, dio indicios de estar en el nivel de actividad general porque resolvió un SEL con infinitas soluciones e identificó sus características. En tanto, Ana realizó un proceso similar para resolver el mismo SEL y concluyó que el SEL tenía infinitas soluciones. Luego, Ana le pidió orientación a Andrew para representar la solución del SEL en forma de conjunto. Él le muestra su conjunto solución y Ana pareciera que lo comprendió porque escribió lo mismo. Conjeturamos que la reflexión de los estudiantes sobre su experiencia de resolver SELs de *mxm* que tenían infinitas soluciones, les permitió inferir que la relación que abstrajeron en la tarea 2 para determinar cuándo un SEL de 2*x*2 tiene infinitas soluciones se aplicaba, también, para SELs de *mxm*.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 8 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+(-2)2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{2+(-2)1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\text{Como } R(A) = \left(\left[A \middle| B\right]\right) = 2 < \text{N° incógnitas} = 3, \text{ entonces el sistema tiene infinitas soluciones}$$

$$\text{El conjunto solución del sistema es: } S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \; x = \frac{13-2t}{3} \wedge y = \frac{8t+14}{3} \wedge z = t \wedge t \in \mathbb{R} \right\}$$

Fig. 5: Respuesta de Andrew al SEL de la tarea 3 formado por las ecuaciones lineales: *x*+*y*-2*z*=9, 2*x*-*y*+4*z*=4 y 4*x*-2*y*+8*z*=8

Actividad formal

Finalizamos la progresión del razonamiento de los estudiantes con el nivel de actividad formal de los estudiantes. Esto implicó que los estudiantes identificaron cuando un SEL de *mxn* tenía como conjunto solución infinitas usando el simbolismo convencional y sin el apoyo de modelos. Consideramos que el desarrollo realizado por los estudiantes en la tarea 4, dio indicios de que pudieron haber alcanzado el nivel de actividad formal, pues ellos usaron adecuadamente lo que conjeturaron en la tarea 2 en una situación diferente de las tareas previas. Por ejemplo, en la tarea 4 se les pidió determinar el conjunto solución de SELs con diferente número de ecuaciones lineales y número de incógnitas. Uno de estos SELs fue el de la Figura 6 que posee tres ecuaciones lineales y cinco incógnitas.

$$\left.\begin{array}{c} x + 2y + 5t = 3 \\ z + 3t = 3 \\ -2t + u = 4 \end{array}\right| \text{, con incógnitas } x, y, z, t, u.$$

Fig. 6: Ejemplo de un SEL propuesto en la tarea 4

Como se observa en las resoluciones de Ana y Andrew (ver Figuras 7 y 8), ambos determinaron la solución del SEL de 3*x*5 de la Figura 5. Para ello, analizaron los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada de la matriz escalonada por filas asociada a este SEL en conjunto con el número de incógnitas de este. Además, Ana y Andrew concluyeron que el SEL de la Figura 5 tenía infinitas soluciones. En particular, Ana escribió "*como el R(A|B)=R(A)=3 y R(A)<N° de incógnitas, entonces el sistema tiene infinitas soluciones*" (ver Figura 7). A continuación, Andrew escribió correctamente el conjunto solución de este SEL (ver Figura 7). En tanto, Ana escribió adecuadamente las soluciones del SEL, aunque para dar las soluciones de *x*, *z* y *u* usó como parámetros a las incógnitas *t* e *y*. Asimismo, Ana escribió un conjunto solución para el SEL en donde separa por comas las soluciones para *x*, *z*, *u* e indicó que tanto *y* como *t pertenecían a los números reales* (ver Figura 7).

Al analizar la resolución de las tareas de Ana y Andrew, podemos inferir que ambos lograron abstraer las regularidades de las características de un SEL con infinitas soluciones y de establecer una relación entre los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada de la matriz escalonada por fila de un SEL, el número de incógnitas, y un SEL con infinitas soluciones. Sin embargo, solo Andrew logró representar correctamente el conjunto solución de un SEL cuando tiene infinitas soluciones como se observó en sus resoluciones de los SEL de las tareas 3 (Figura 5) y 4 (Figura 8).

$$\left.\begin{aligned} x+2y+5t&=3\\ z+3t&=3\\ -2t+u&=4 \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{Forma Matricial} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ t\\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\\ 3\\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz Ampliada: } \left[A \mid B\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\text{Como el } R\left[A \mid B\right] = R(A) = 3 \text{ y } R(A) < N° \text{ de Incógnitas, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.}$$

$$\begin{aligned} u&=4+2t\\ z&=3-3t \end{aligned} \Rightarrow \therefore \ x = 3-5t-2y,\ t, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{El conjunto solución del sistema es: } \left\{\left(x=3-5t-2y\right), \left(u=4+2t\right), \left(z=3-3t\right), \text{con } y, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Fig. 7: Respuestas de la estudiante Ana a uno de los SELs propuesto en la tarea 4

$$\left.\begin{aligned} x+2y+5t&=3\\ z+3t&=3\\ -2t+u&=4 \end{aligned}\right|$$

La matriz ampliada es:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{\left(-\frac{1}{2}\right)3}]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{2+(-3)3}]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[f_{1+(-5)3}]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5/2 & 13\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\text{Como } \begin{array}{c} r(A) = r\left[A \mid B\right]\\ 3 = 3 < 5 \end{array} < N° \text{ de Incógnitas. } \therefore \text{ el sistema tiene infinitas soluciones.}$$

$$\begin{aligned} u&=4+2t\\ z&=3-3t \quad , \text{con } t=\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\\ x&=3-2y-5t, \text{ con } y=\beta,\ \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

El conjunto solución es:

$$S = \left\{\left(x, y, z, t, u\right) \in \mathbb{R}^5 / x = 3-5t-2\alpha \wedge y = \beta \wedge z = 3-3\alpha \wedge t = \alpha \wedge u = 4+2\alpha \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

Fig. 8: Respuestas del estudiante Andrew a uno de los SELs propuesto en la tarea 4

DISCUSIÓN

En esta investigación exploratoria, caracterizamos el progreso del razonamiento de dos estudiantes de primer año de universidad cuando determinan que un SEL tiene como conjunto solución infinitas. Esto fue un proceso gradual en que ambos estudiantes transitaron del *modelo-de* al *modelo-para*. El modelo general es “un SEL con infinitas soluciones”. Inicialmente, los dos estudiantes (usando sus conocimientos previos) identificaron que el SEL vinculado al problema contextual de Juan tenía infinitas soluciones porque a partir de los valores que se le diera a la incógnita y iban a ir obteniendo los valores para las demás incógnitas (Figura 3). Luego, el SEL de 2x2 vinculado al problema contextual de Juan sirvió, para los estudiantes, como *modelo-de* un SEL de 2x2 que tiene infinitas soluciones. Ellos conjeturaron que un SEL tiene infinitas soluciones cuando el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada asociado al SEL es menor al número de incógnitas (Figura 6 y Figura 7). Posteriormente, el *modelo-de* un SEL de 2x2 que tiene infinitas soluciones funcionó como un *modelo-para* identificar y resolver un SEL de mxm con infinitas soluciones (Figura 4). Finalmente, los estudiantes identificaron y resolvieron SEL de mxn con infinitas soluciones.

Se destaca que ambos estudiantes lograron identificar cuando un SEL tenía infinitas soluciones por medio del rango de la matriz de coeficientes, el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas del SEL. Por otra parte, con la finalidad de que estudiantes como Ana logren representar el conjunto solución de un SEL con infinitas soluciones, sugerimos incorporar tareas previas a introducir SELs que pidan representar e indicar las características de conjuntos representados de forma analítica. Por ejemplo, se les puede pedir a los estudiantes que representen el conjunto solución de ecuaciones lineales como las siguientes: $x+1=2x+5$, $x+2=x+2$ y $x-3=x+6$. Por otra parte, considerando los resultados de nuestro estudio, coincidimos con Smith et al. (2022) con respecto a que las resoluciones de los SELs con infinitas soluciones son menos intuitivas para los estudiantes, por lo que se requiere más estudio que den indicios de cómo facilitar el aprendizaje de este tipo de SELs.

CONCLUSIONES

De acuerdo con el trabajo presentado y a los resultados obtenidos, planteamos las siguientes conclusiones con respecto a la caracterización del progreso en el razonamiento de estudiantes de primer año de universidad cuando determinan que un SEL tiene infinitas soluciones:

1.- Las matemáticas formales de los estudiantes de identificar cuándo un SEL de mxn tiene infinitas soluciones (tarea 4) pasaron a primer plano como una extensión natural de su experiencia con un problema contextual que involucraba un SEL de 3x2 (tarea 1).

2.- El conjunto solución de un SEL que posee infinitas soluciones no es fácil de representar para los estudiantes porque no es inmediato ni intuitivo de construir (a diferencia del conjunto solución de un SEL que tiene solución única o vacía).

3.- La caracterización del razonamiento de los estudiantes cuando determinan que un SEL tiene infinitas soluciones es una herramienta que puede ser considerada para planificar este contenido matemático.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo desarrollado gracias a la ANID por medio del proyecto Fondecyt de Iniciación N°11190284 y la colaboración de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Austral de Chile.

REFERENCIAS

Bakker, A., What is Design Research in Education?, En Design research in education: a practical guide for early career researchers, Routledge, ISBN: 978-0-203-70101-0, 3-22, London, England (2018)

Bakker, A., y Eerde, D. V., An introduction to design-based research with an example from statistics education, En Approaches to qualitative research in mathematics education, Springer, ISBN: 978-94-024-0688-7, 429-466, Dordrecht, Netherlands (2015)

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., y Presmeg, N., Approaches to qualitative research in mathematics education, 1ª ed., Springer, ISBN: 978-94-024-0688-7, Dordrecht, Netherlands (2015)

Cárcamo, A. D., Fuentealba, C. E., y Tauler, F. J., Concepciones sobre sistemas de ecuaciones lineales de 3x2 con solución vacía: un estudio exploratorio con estudiantes universitarios, https://doi.org/10.4067/S0718-50062021000100217, Form. Univ., 14(1), 217-224 (2021)

Cobb, P., Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis, https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0101_1, Math. Think. Learn., 1(1), 5-43 (1999)

Doorman, L. M., y Gravemeijer, K. P. E., Emergent modelling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity, https://doi.org/10.1007/s11858-008-0130-z, ZDM, 41(1), 199-211 (2009)

Engler, A., Vrancken, S., Müller, D., y Cadoche, L., Propuesta didáctica para estudiar sistemas de ecuaciones lineales. Sondeo de opinions, Educ. Mat., ISSN 0187 8298, 13(2), 27-129 (2001)

Gravemeijer, K., How emergent models may foster the constitution of formal mathematics, https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4, Math. Think. Learn., 1(1), 155-177 (1999).

Gravemeijer, K., Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education, https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3, Math. Think. Learn., 6(2), 105-128 (2004)

Gravemeijer, K., Emergent Modeling: an RME design heuristic elaborated in a series of examples, Educ. Desig., ISSN 1759 1325, 4(13), 1-31 (2020)

Henriques, A., y Martins, M., Mathematical reasoning in linear systems learning: a higher education exploratory teaching experiment with prospective teachers, https://doi.org/10.35763/aiem21.4238, AIEM, 21, 65-85 (2022)

Trigueros, M., Learning linear algebra using models and conceptual activities, En Challenges and strategies in teaching linear algebra ICME-13 monographs, Springer Cham, ISBN: 978-3-319-66810-9, 29-50, Hamburg, Germany (2018)

Oktaç, A., Conceptions about system of linear equations and solution, En Challenges and strategies in teaching linear algebra ICME-13 monographs, Springer Cham, ISBN: 978-3-319-66810-9, 71-101, Hamburg, Germany (2018)

Rasmussen, C., y Blumenfeld, H., Reinventing solutions to systems of linear differential equations: a case of emergent models involving analytic expressions, https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.004, J. Math. Behav., 26(3), 195-210 (2007)

Simon, M. A., Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective, https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114, J. Res. Math. Educ., 26(2), 114-145 (1995)

Simon, M., Tzur, R., Heinz, K., y Kinzel, M., Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective abstraction, https://doi.org/10.2307/30034818, J. Res. Math. Educ., 35(5), 305-329 (2004)

Smith, J. L., Lee, I., Zandieh, M., y Andrews-Larson, C., A progression of student symbolizing: solutions to systems of linear equations, https://doi.org/10.35763/aiem21.4237, AIEM, 21, 45-64 (2022)

Tzur, R., Hagevik, A., y Watson, M. E., Fostering mathematical meaning via scientific inquiry: a case study, In Proceedings of the 28th conference for the international group for the psychology of mathematics education, 1ª ed., 4, 345-352, Bergen University College, ISSN: 0771-100X, Bergen, Norway (2004)

Tzur, R., y Simon, M., Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning, https://doi.org/10.1007/s10763-004-7479-4. J. Sci. Math. Educ., 2(2), 287-304 (2004)