AIEM

Avances de Investigación en Educación Matemática

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN 2254-4313 | (2023) 24, 1-20 | aiem.es

seiem.es

Conocimiento matemático y didáctico de futuros maestros sobre el área de figuras 2d

Mathematical and didactic knowledge of preservice primary teachers about the area of 2d figures

Sofía Caviedes Barrera @, Genaro de Gamboa Rojas @, Edelmira Badillo Jiménez @

Universitat Autònoma de Barcelona (España)

Resumen ∞ Este estudio busca caracterizar el conocimiento especializado en un grupo de estudiantes para maestro (EPM). Se pone énfasis en los subdominios de Conocimiento de los Temas, Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas, Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas y Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas. Se analizan los procedimientos y justificaciones escritas que los EPM utilizan para resolver una tarea de área, y para interpretar respuestas de alumnos a una tarea de área. Los resultados muestran que el uso de procedimientos diversos se relaciona con la movilización de indicadores del Conocimiento de los Temas y promueven el establecimiento de conexiones con otros contenidos matemáticos. Los indicadores definidos para el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas, y el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, se relacionan con una mayor capacidad de los EPM para interpretar respuestas de alumnos.

Palabras clave ∞ Conocimiento especializado; Subdominios de conocimiento; Estudiantes para maestro; Área de figuras planas; Interpretación de respuestas de alumnos

Abstract ∞ This study aims to characterize elements of the specialised knowledge of a group of pre-service teachers (PST). Emphasis is placed on the following subdomains: Knowledge of Topics, Knowledge of the Structure of Mathematics, Knowledge of the Features of Learning Mathematics and Knowledge of Mathematics Teaching. The procedures and written justifications that PST use in task-solving and in interpreting student responses to area tasks are analyzed. The results show that the use of procedures of a different nature is related to the mobilization of different indicators of Knowledge of Topics, while promoting the establishment of connections with other mathematical content. The indicators defined for the Knowledge of the Features of learning mathematics, and Knowledge of Mathematics teaching, are related to a greater capacity of the PST to interpret students' responses.

Keywords ∞ Specialised knowledge; Subdomains of knowledge; Pre-service teachers; Area of flat figures; Interpreting student responses

Caviedes Barrera, S., de Gamboa Rojas, G. & Badillo Jiménez, E. (2023). Conocimiento matemático y didáctico de futuros maestros sobre el área de figuras 2d. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, *24*, 1-20. https://doi.org/10.35763/aiem24.4076

1. INTRODUCCIÓN

La agenda de investigación sobre el conocimiento del profesor ha ido en constante auge desde el trabajo de Shulman (1986), quien se interesó, principalmente, en dos aspectos de la profesión docente. Por un lado, en comprender la manera en que los profesores transforman su conocimiento para hacerlo comprensible a sus alumnos; y, por otro lado, en comprender las fuentes de las analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones y reformulaciones que los profesores utilizan en el aula. A partir del trabajo de Shulman (1986), numerosos estudios han puesto el foco en el conocimiento de profesores en ejercicio y en formación (Ball et al., 2008; Carrillo-Yañez et al., 2018; Rowland et al., 2005), con la finalidad de distinguir los componentes específicos del conocimiento de los profesores de matemáticas. Con base en el modelo MKT de Ball et al. (2008), Carrillo-Yañez et al. (2018) proponen el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), el que se genera a partir de una redefinición y una nueva forma de conceptualizar la noción de especialización en el conocimiento del profesor de matemáticas (Scheiner et al., 2019). El conocimiento especializado es un conocimiento específico y necesario del profesor de matemáticas (Carrillo-Yañez et al., 2013, 2018).

En este estudio se asume el carácter especializado del conocimiento de los profesores desde el MTSK. Dicho modelo considera la noción de especialización como el núcleo del conocimiento del profesor y es, a su vez, una herramienta metodológica que permite analizar diferentes prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Carrillo-Yañez et al., 2018). Particularmente, nos interesa el conocimiento especializado sobre área que movilizan los EPM cuando resuelven tareas y cuando interpretan respuestas de alumnos. Este último ha adquirido especial relevancia en los últimos años, pues diversas investigaciones señalan que el proceso de interpretar respuestas de alumnos, por parte de los profesores, es un aspecto clave para evaluar y ajustar la instrucción de forma continua, a fin de enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje (Llinares, 2012; Mason, 2002). Esta práctica requiere que los EPM cuenten con un conocimiento amplio del contenido a enseñar, sin embargo, existe una serie de investigaciones que reportan las dificultades que tienen los EPM al momento de resolver tareas de área. Por ejemplo, algunas investigaciones evidencian que los EPM tienen una tendencia generalizada hacia el uso de fórmulas y escasas estrategias de resolución (Baturo y Nason, 1996; Caviedes et al., 2019, 2021b; Runnalls y Hong, 2020, Simon y Blume, 1994). Otras, ponen en evidencia las dificultas de los EPM para aceptar la propiedad de conservación del área (Hong y Runnalls, 2020) y para identificar la relación entre área y perímetro (Livy et al., 2012). Debido a que no hemos encontrado investigaciones centradas en los componentes de conocimiento especializado sobre área en los EPM, el presente estudio plantea dar respuesta a la pregunta: ¿cuáles son las categorías de conocimiento especializado que movilizan los EPM cuando resuelven tareas de área y cuando interpretan respuestas de alumnos?

A fin de dar respuesta a la pregunta planteada se pone énfasis en cuatro de los subdominios del MTSK: el Conocimiento de los Temas (KoT); el Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM); el Conocimiento de las Características del

Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM); y el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT). El objetivo que se propone es caracterizar el KoT, KSM, KFLM y KMT que movilizan los EPM cuando resuelven tareas de área y cuando interpretan respuestas de estudiantes. Los subdominios antes mencionados se seleccionan a priori, ya que consideramos que las tareas no permiten explorar el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) ni el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). Respecto al KPM, las categorías de conocimiento aún se encuentran en proceso de construcción (Carrillo-Yañez et al., 2018) y las tareas no fueron diseñadas con la intención de definir categorías para dicho subdominio. Respecto al KMLS, consideramos que los EPM analizados no cuentan con la experiencia ni formación necesarias para movilizar conocimientos de este subdominio.

2. Marco teórico

2.1. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

El MTSK se ha utilizado, principalmente, para estudiar la práctica de los profesores, sin embargo, Carrillo-Yañez et al. (2018) señalan que el modelo también ha permitido estructurar programas de formación inicial y, con ello, construir elementos de conocimiento especializado en los EPM. Así, el MTSK puede asumirse como un referente de los componentes deseables en el conocimiento de los EPM (Liñan et al., 2014). El modelo se conforma de distintos subdominios que responden a dos grandes dimensiones: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Dentro del MK se incluyen dos de los subdominios que nos interesan, el KoT y KSM. El KoT describe el *qué* y *de qué manera* los profesores de matemáticas conocen el contenido que enseñan, siendo una combinación entre el conocimiento que se espera que los alumnos aprendan y una comprensión más profunda, formal y más rigurosa (Carrillo-Yañez et al., 2018). El KoT incluye diferentes categorías de conocimiento: definiciones (p. ej., ¿qué es el área matemáticamente hablando?); propiedades y sus principios (p. ej., la propiedad de la conservación del área); la fenomenología o contextos de uso (p. ej., las aproximaciones fenomenológicas del área señaladas por Freudenthal [1983], como la comparación y reproducción de formas o el reparto equitativo de superficies); procedimientos y sus justificaciones (p. ej., cuándo, cómo y porqué utilizar fórmulas o procedimientos de descomposición); sistemas de representación (p. ej., de tipo simbólico o geométrico); las conexiones intraconceptuales (las relaciones que se pueden establecer entre las categorías antes señaladas, p. ej., relación entre el procedimiento de descomposición de superficies y las representaciones de tipo geométrico). El KSM describe el conocimiento de los profesores sobre conexiones entre diferentes temas matemáticos (Montes et al., 2013). Se consideran cuatro categorías de conexiones: conexiones de complejidad creciente, de simplificación, auxiliares y transversales. Las conexiones de complejidad creciente (complejización) y de simplificación se relacionan con conocimientos elementales y avanzados, es decir, los conocimientos avanzados permiten a los profesores un tratamiento de la matemática elemental desde una perspectiva avanzada; los conocimientos elementales, un tratamiento de la matemática avanzada desde una perspectiva elemental (Montes et al, 2013). Por ejemplo, una conexión de simplificación se puede establecer cuando los profesores utilizan el modelo de área de un rectángulo, para la enseñanza de la multiplicación de números naturales. Una conexión de complejización se puede establecer cuando un profesor utiliza el cálculo del área de rectángulos semejantes, para introducir la comparación entre un crecimiento lineal y uno cuadrático. Las conexiones auxiliares están relacionadas con la participación de un tema en un proceso más largo (Carrillo-Yañez et al., 2018), es decir, *con la necesidad de considerar una noción —procedimiento o constructo— como apoyo para que los alumnos comprendan un determinado concepto —procedimiento o noción—* (Policastro et al., 2019, p. 3). Por ejemplo, la medición de superficies mediante la iteración de unidades bidimensionales para dar sentido a las propiedades de las unidades de medida. Finalmente, las conexiones transversales se refieren a los conocimientos que fundamentan el establecimiento de relaciones entre varios temas con rasgos comunes (Montes et al., 2013). Por ejemplo, la conexión entre la medición de una magnitud, usando diferentes unidades de medida, y la relación inversamente proporcional entre el tamaño de la unidad de medida y el valor numérico obtenido de la medición.

Respecto al PCK, tal y como se indicó en el apartado 1, nos interesa el KFLM y KMT. El KFLM *engloba los conocimientos asociados a las características inherentes al aprendizaje de las matemáticas, poniendo el foco en el contenido matemático (como objeto de aprendizaje) y no en el alumno* (Carrillo-Yáñez et al., 2018, p. 11). Incluye cuatro categorías: conocimiento sobre teorías de aprendizaje de las matemáticas (p. ej., los niveles de Van Hiele); fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas (p. ej., los alumnos están más familiarizados con el cálculo de áreas de figuras prototípicas); la manera en que los alumnos interactúan con el contenido matemático (p. ej., a menudo resuelven tareas de área mediante fórmulas); el conocimiento de las motivaciones y expectativas que poseen los alumnos cuando se enfrentan a un contenido particular (p. ej., el cálculo de áreas de figuras no prototípicas suele provocar rechazo). El KMT se refiere a los conocimientos sobre la enseñanza intrínsecamente ligados al contenido y considera tres categorías: conocimiento sobre teorías de enseñanza (p. ej., el conocimiento acumulado de la experiencia o la teoría antropológica de lo didáctico); conocimiento sobre recursos de enseñanza (p. ej., Tangram o geoplano para enseñar áreas), su potencial y limitaciones (p. ej., en un geoplano ortométrico no es posible construir un triángulo equilátero); conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (p. ej., la utilidad de usar distintos registros de representación para la enseñanza del área).

2.2. Dificultades de los EPM en la resolución de tareas de área

Freudenthal (1983) señala que dos características significativas del área y su medición son, por un lado, la riqueza contextual del concepto (en la naturaleza, la cultura y la sociedad); y, por otro, la pobreza asociada a la instrucción de dicho concepto. La primera característica, relacionada con la diversidad de situaciones en las que puede aparecer el área, permite inferir una complejidad implícita a dicho concepto (Caviedes et al., 2021a). Un ejemplo de ello es la complejidad subyacente a la fórmula del área del rectángulo (*base x altura*), ya que la comprensión de dicha fórmula requiere una coordinación entre la estructuración espacial y el razonamiento multiplicativo, en conjunto con diferentes procedimientos y propiedades (Sarama y Clements, 2009). Esta complejidad lleva asociada ciertas dificultades que se hacen presentes en los EPM. Por ejemplo, Simon y Blume (1994) señalan que los EPM utilizan unidades lineales, en lugar de unidades cuadradas, para medir áreas y asocian cambios de longitud a cambios de áreas. Además, advierten que una gran cantidad de EPM no logra disociar el área del número que la mide, pues al medir dos superficies iguales con distintas unidades de medida, afirman que una es mayor que otra basándose en los datos numéricos. Dichas dificultades han sido reportadas también por Hong y Runnalls (2020), quienes identifican que los EPM tienen dificultades para aceptar la conservación del área en figuras no prototípicas. Por su parte, Tierney et al. (1990) evidencian que los EPM muestran repertorios limitados de conocimiento al momento de resolver tareas, pues asocian el área a números y fórmulas, y de no tener valores numéricos asociados a una región 2D, toman como referencia el perímetro de la figura para calcular el área. Los mismos autores señalan que los EPM realizan una falsa asociación entre área y perímetro (aumentos de perímetro implican aumentos de área). Esta falsa asociación también se ha evidenciado en EPM que cursan su último año de formación (Livy et al., 2012). Por su parte, Browning et al. (2014) realizan una revisión de los estudios sobre el conocimiento de los EPM, en temas relacionados con geometría y medida publicados entre 1984 y 2011. Los autores señalan que 12 de los 26 estudios revisados hacen referencia al área. Además, concluyen que el conocimiento de los EPM es limitado debido a la tendencia a utilizar enfoques memorísticos y procedimentales.

Las investigaciones anteriores evidencian que las dificultades de los EPM son diversas (p. ej., escasas estrategias de resolución, aceptación de la conservación del área), aspecto que resulta preocupante para su trabajo como futuros profesores. Esto, porque la falta de conocimiento matemático puede limitar la capacidad de los EPM para ayudar a sus alumnos a desarrollar una comprensión integrada, y significativa, de los conceptos y procesos matemáticos relacionados con el área (Baturo y Nason, 1996). En este contexto, este estudio busca aportar a la investigación reportando el conocimiento especializado que los EPM movilizan al resolver tareas de área, y al interpretar respuestas de alumnos.

2.3. Competencia docente de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

La competencia de mirar profesionalmente (*Professional Noticing*) ha sido conceptualizada desde distintas perspectivas (Jacobs et al., 2010; Mason, 2002; Sherin y van Es, 2009) que comparten aspectos en común. Uno de estos aspectos es que el *noticing* es un componente fundamental de la competencia profesional del profesor de matemáticas, ya que permite a los profesores poner al alumno en el centro del proceso de enseñanza y desarrollar su competencia matemática (Fernández y Choy, 2020). En este estudio se asume la perspectiva de Jacobs et al. (2010), quienes señalan que la competencia de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes está vinculada a la forma en que los profesores utilizan su conocimiento, de las matemáticas y de su didáctica para: (a) atender a las estrategias de los estudiantes; (b) interpretar las estrategias utilizadas por los estudiantes; y (c) decidir un curso de acción instructivo y productivo con base en tal interpretación. Jacobs et al. (2010) señalan que este conjunto de destrezas está interrelacionado, pues ocurren en un segundo plano y de manera casi simultánea. Además, los autores señalan que los profesores no sólo necesitan atender a las estrategias de los estudiantes para interpretar su pensamiento matemático, sino que también deben tener un conocimiento del contenido matemático, a fin de ser capaces de conectar la manera en que las estrategias de los estudiantes reflejan su comprensión de los conceptos matemáticos.

La competencia de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes ha sido abordada, mayoritariamente, en relación con el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza —MKT— de Ball et al. (2008) y su subdominio de Conocimiento Especializado del Contenido Matemático —SCK— (p. e., Thomas et al., 2017), y en menor medida con el modelo MTSK. Carrillo-Yañez et al. (2018) señalan que el subdominio del SCK es una de las grandes aportaciones del modelo MTK, ya que permite reconceptualizar la noción de especialización que es propia del profesor de matemáticas. Igualmente, los autores señalan que, a diferencia del MKT que centra su atención en la práctica que los profesores llevan a cabo en clase (ignorando los conocimientos que los profesores pueden poner en juego al realizar otro tipo de actividad docente), el MTSK contempla el conocimiento que los profesores utilizan en sus distintas labores, por ejemplo, planificar, enseñar o reflexionar sobre la práctica. Debido a que en este estudio no nos centramos en la práctica docente, creemos que es pertinente abordar la competencia del *noticing* en relación con el MTSK. En esta línea Badillo y Fernández (2018) señalan que el MTSK permite comprender la manera en que un profesor usa el MK y el PCK para identificar e interpretar aspectos relacionados con el pensamiento matemático de los estudiantes, y posteriormente decidir. Así las autoras señalan que, para atender a las estrategias de los estudiantes, e interpretar su comprensión matemática, los profesores deben poner en juego aspectos del KoT, KSM, KPM y KFML; mientras que para decidir cómo responder, los profesores deben poner en juego aspectos del KMT, KFLM y KMLS. Igualmente, las autoras señalan que el resto de subdominios pueden estar implicados en las diferentes destrezas. De manera similar, en este estudio buscamos explorar el conocimiento especializado que los EPM movilizan cuando deben interpretar respuestas de alumnos.

3. Método

El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo con un enfoque cualitativo (Bassey, 1990) y forma parte de una investigación más amplia, que busca caracterizar el conocimiento sobre área en un grupo de EPM. Se realiza un análisis de contenido (Krippendorff, 2004) y se utilizan las categorías de análisis que el MTSK propone para los subdominios del KoT, KSM, KFLM y KMT (descritas en el apartado 2.1). Para cada una de estas categorías se construyen indicadores de conocimiento (Tabla 2) y para facilitar el proceso de asignación de dichos indicadores a las respuestas de los EPM, se utiliza el programa informático MAXQDAplus. La recogida de datos se realizó en el primer trimestre del curso escolar 2020-2021. Los participantes fueron 70 EPM que cursaban la materia de Enseñanza y Aprendizaje de las

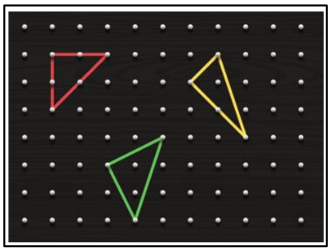
Matemáticas, del tercer curso del Grado de Educación Primaria en la Universitat Autònoma de Barcelona. Dicha materia forma parte de la mayoría de programas de formación de maestros a nivel mundial (Tatto et al., 2012). Los EPM, como parte de la materia mencionada, habían tenido instrucción previa sobre diferentes procedimientos para medir áreas.

3.1. Instrumento y procedimiento

Se diseñó un cuestionario semiestructurado de respuesta abierta, los EPM lo resolvieron de manera individual y se les pidió justificar cada procedimiento utilizado. Para resolver las tareas, los EPM podían utilizar material manipulativo (recortables como anexo al cuestionario), además de instrumentos de medida. El cuestionario constó de un total de 8 tareas y fue aplicado por la profesora a cargo de la asignatura en formato online, debido a la contingencia sanitaria COVID-19. Los EPM tuvieron una semana para enviarlo en formato pdf o word. Por motivos de extensión y debido al objetivo del presente estudio, se presentan evidencias de las resoluciones a la Tarea 4 (Figura 1) y a la Tarea 8 (Figura 2).

Figura 1. Tarea 4 de cuestionario propuesto al grupo de EPM

Observa los triángulos construidos en el geoplano. ¿Cuál es el área de cada triángulo? ¿Cuál tiene mayor área? *Justifica tus respuestas utilizando dos o tres procedimientos diferentes*



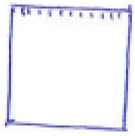
La Tarea 8 proponía la siguiente situación: “Tània y Laia cursan 2.º de la Educación Secundaria (ESO). En clase de matemáticas, la profesora pide calcular el área de dos cuadrados utilizando más de un procedimiento. Tània tiene dificultades para calcular el área de uno de los cuadrados. Laia ha podido resolver toda la tarea usando diferentes procedimientos. ¿Qué conocimientos crees que necesita Tània para poder resolver la tarea? ¿Cómo podría la profesora ayudarla? Justifica tu respuesta”. La Figura 2 ilustra las respuestas de las alumnas.

Figura 2. Figura que acompañaba a la Tarea 8

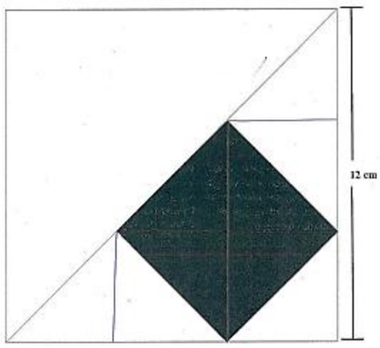
a- ¿Cuál es el área del cuadrado de 12 cm? ¿por qué?

A= $C^2 = 12^2 = 144\ cm^2$

“Si formamos cuadrados pequeños de 1 cm^2, nos saldrían 12 filas y 12 columnas y si multiplicamos el nº de filas por el nº de columnas nos saldrían 144 cm^2”.



b- ¿De cuántas maneras posibles puedes calcular el área del cuadrado negro? Explícalo.



“Si dibujas una de las diagonales del cuadrado puedes ver que esta representa el doble de los triángulos de su lado, y si dibujas la otra, ves que representa cuatro veces el más pequeño de todos. Si trazas la altura de los otros triángulos puedes ver que la mitad del cuadrado representa 9 triángulos... el cuadrado negro $\frac{4}{9}$ de la mitad. Por lo tanto, del total... $\frac{4}{18}$ o $\frac{2}{9}$ porque la otra mitad también la dividí en 9 partes”.

“Con la medida de los lados del cuadrado y haciendo Pitágoras para calcular la diagonal del cuadrado y dividirla en tres para encontrar el lado del cuadrado negro”

“Midiendo el lado del cuadrado”

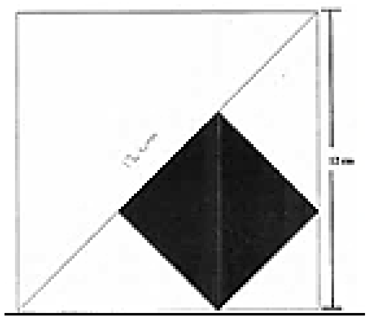
“ $\frac{2}{9}$ de $12^2 = \frac{2}{9}$ x144 = $\frac{288}{9}$ =32 cm^2”

“El lado del cuadrado está compuesto por tres triángulos pequeños, por lo tanto, cada lado mide 4cm → $\frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} = 8$ cm^2. Como el cuadrado es cuatro veces este → 8 cm^2 x 4 = 32 cm^2”.

Laia

a- Es 144 cm^2 ya que los cuadrados tienen lados iguales y la fórmula para calcularlo es la siguiente: A = $lado^2 = 12^2 = 144\ cm^2$”

b- Visualmente el lado del cuadrado mide 8 cm, $\frac{1}{3}$ parte del lado del triángulo → 8×8 = 64 cm”



Tània

3.2. Análisis

Los indicadores que constituyen las categorías del subdominio del KoT se construyen a priori y surgen de una *configuración epistémica* sobre los procesos de medición de áreas (Caviedes et al., 2021a). Los elementos de dicha configuración se adaptan a las categorías que el MTSK propone para el KoT y permiten una *codificación deductiva* de las respuestas de los EPM. Los indicadores correspondientes a las categorías de los subdominios del KSM, KFLM y KMT emergen del propio análisis de las respuestas de los EPM, pues la configuración epistémica elaborada no presentaba elementos que pudiesen adaptarse a las categorías de dichos subdominios. La Tabla 2 muestra las categorías de conocimiento y sus respectivos indicadores, en concordancia con la conceptualización del modelo MTSK. Las figuras 3, 4, 5, 6 y 7 muestran ejemplos de dos EPM que movilizan categorías de conocimiento especializado en los subdominios del KoT, KSM, KFLM y KMT. Se toman en consideración las resoluciones de la EPM 3 y EPM 66, ya que se consideran resoluciones representativas del grupo de EPM que moviliza indicadores de conocimiento iguales o similares.

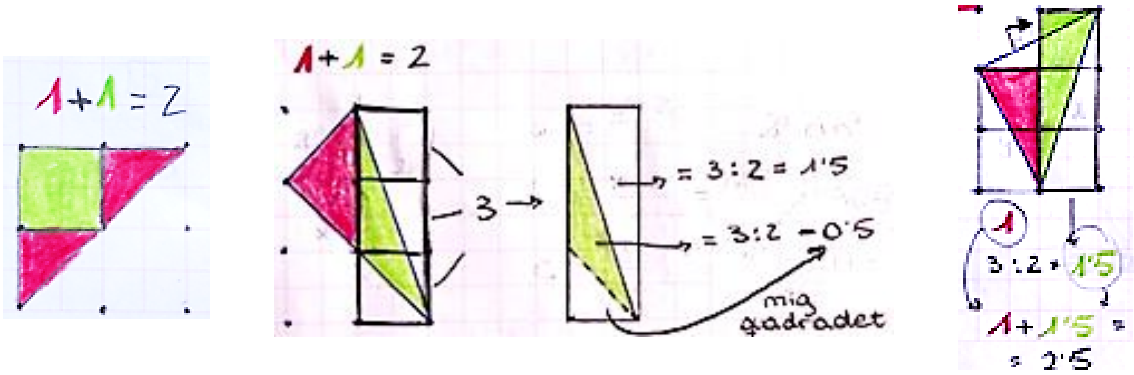
Tabla 2. Categorías de conocimiento especializado

Categorías de conocimiento	Indicadores
	KoT
Representaciones (R)	(R1) Geométrica: utilizando particiones en figuras conocidas para calcular el área de otras figuras. Permite visualizar el proceso efectuado para, por ejemplo, la descomposición de diferentes superficies, el trazado de líneas y elementos auxiliares, y las posibles reconfiguraciones. (R2) Simbólica: conjunto de los R+ para el cálculo directo o indirecto del área. Utilizando otras expresiones de tipo algebraico, por ejemplo, la relación entre el área de un cuadrado y su diagonal $d^2 = l^2 + l^2$; o bien, utilizando teorema de Pitágoras para obtener las medidas de longitud de un triángulo rectángulo $h^2 = c^2 + c^2$
Procedimientos (P) y justificaciones (J)	(P1) Descomponer superficies en unidades y/o subunidades congruentes para facilitar el proceso de medir áreas. (P2) Medir áreas como proceso aditivo contando unidades y/o subunidades que recubren la superficie. (P3) Medir dimensiones lineales y utilizar fórmulas (P4) Calcular áreas de figuras conocidas para obtener áreas de figuras desconocidas mediante descomposición (J1) Cortar el espacio bidimensional en regiones de igual área sirve como base para comparar áreas, ya que permite establecer relaciones entre las formas que componen una superficie
Propiedades (Pp) y principios (Pr)	(Pp1) Transitividad (Pp2) Acumulación y aditividad (Pr1) Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo (Pr2) Dos figuras equivalentes en cantidad de espacio ocupado, tienen áreas iguales

Categorías de conocimiento	Indicadores
	KSM
Conexiones auxiliares	(Cau1) Teorema de Pitágoras
Conexiones de simplificación	(Csm1) Conteo de unidades cuadradas como procedimiento elemental en el cálculo de áreas
	KFLM
Fortalezas y debilidades	(Fd1) Conocimiento sobre fracciones (Fd2) Conocimiento sobre las propiedades de los polígonos (Fd3) Teorema de Pitágoras (Fd4) Transformaciones isométricas
Errores	(Er1) Confusión entre lado y diagonal de un cuadrado (Er2) Operaciones con fracciones
	KMT
Estrategias de enseñanza	(E1) Uso de heurísticas de resolución de problemas: plantear problemas equivalentes o más sencillos (E2) Uso de procedimientos diversos

Para ilustrar el análisis de los subdominios KoT y KSM, se toman como ejemplo las respuestas a la tarea 4 de la EPM 66. La Figura 3 muestra evidencias de la movilización de diversos indicadores de conocimiento del KoT. La EPM 66 utiliza representaciones de tipo geométrico (R1), ya que recurre a particiones en figuras conocidas para calcular el área de los triángulos. Así mismo, utiliza los procedimientos de descomposición de superficies (P1) y de conteo de unidades y subunidades cuadradas (P2). En su respuesta, la EPM traza el rectángulo en el que se encuentra contenido cada triángulo, a fin de obtener el área de cada triángulo mediante un proceso aditivo. De igual manera, evidencia un uso implícito de la propiedad de acumulación y aditividad (Pp2), ya que reconoce que las figuras pueden ser descompuestas en otras figuras conservando las mismas "partes". Es posible inferir que la EPM reconoce, en el primer ejemplo de la Figura 3, que los triángulos pueden ser equidescomponibles a un paralelogramo (Pr1), es decir, que un triángulo puede descomponerse en un número finito de polígonos y formar un paralelogramo (y viceversa), conservando el área. La EPM descompone el triángulo rectángulo isósceles, ubicado en la esquina superior izquierda (Figura 1) y lo reorganiza mentalmente, teniendo como referencia el área de un rectángulo. Así, se infiere que la EPM reconoce la utilidad de descomponer las figuras en unidades congruentes para comparar áreas (J1), aunque no justifica dicho procedimiento de manera explícita. Además, se infiere que la EPM establece una conexión de simplificación (Csm1), pues utiliza un procedimiento más elemental para el cálculo de áreas, el conteo de unidades cuadradas mediado por el procedimiento de descomposición de superficies.

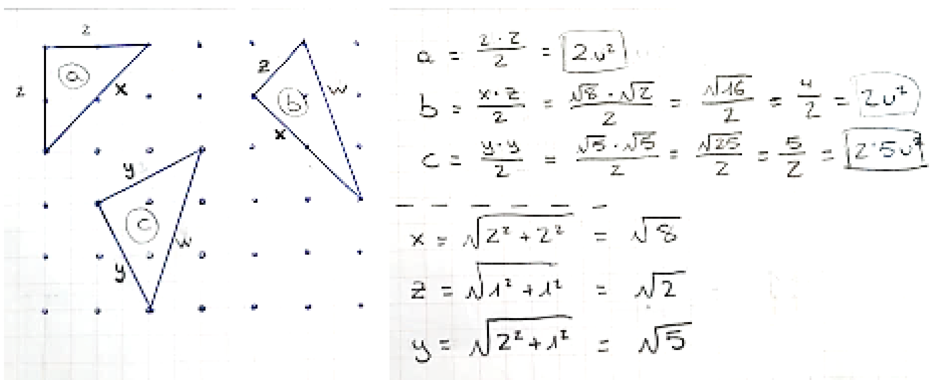
Figura 3. Primer procedimiento utilizado por la EPM 66



"Contando cuadrados, considerando que un cuadrado es 1u²"

La Figura 4 muestra un procedimiento de resolución que permite identificar la movilización de indicadores de conocimiento del KoT y KSM para la Tarea 4. La EPM 66 utiliza representaciones de tipo simbólico (R2) y establece una conexión auxiliar (Cau1) utilizando el teorema de Pitágoras para obtener las longitudes de los triángulos. La EPM 66 identifica que los catetos de los triángulos a, b y c corresponden a hipotenusas de otros triángulos rectángulos (no dados por el ejercicio). Esto le permite utilizar su conocimiento sobre teorema de Pitágoras para calcular la longitud de los catetos de los triángulos a, b y c (vistos como hipotenusas de otros triángulos). En este sentido, el cálculo de áreas de triángulos rectángulos permite evocar un contenido que sirve como apoyo para la resolución de la tarea.

Figura 4. Segundo procedimiento utilizado por la EPM 66

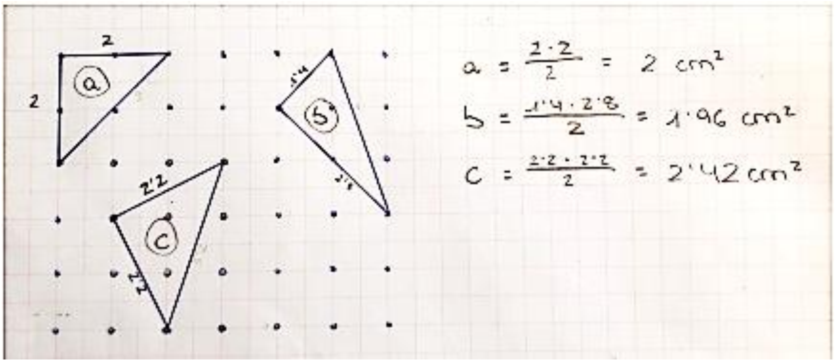


"Como los triángulos son rectángulos, Podemos utilizar el teorema de Pitágoras para saber cuánto miden todos los lados y así calcular el área, considerando que la distancia entre punto y punto del geoplano es 1, el triángulo rojo (a) tiene 2u²; el amarillo (b) tiene 2 u²; y el verde(c) 2.5 u², por lo tanto, es el que tiene más área".

Además, se infiere que la EPM realiza una comparación entre los tres triángulos, determinando que el de mayor área es el triángulo rectángulo isósceles que se ubica más abajo en el geoplano. Dicha comparación se apoya en los valores numéricos obtenidos para el área de cada triángulo. A partir de esto, se infiere que la EPM hace uso de la propiedad de transitividad (Pp1). La EPM también identifica que el triángulo rectángulo isósceles, ubicado en la esquina superior izquierda, y el triángulo rectángulo escaleno (en la esquina superior derecha) son equivalentes y, por lo tanto, tienen igual área (Pr2).

La Figura 5 muestra un procedimiento de resolución que permite identificar la movilización de algunos indicadores de conocimiento del KoT. Se observa que la EPM 66 utiliza representaciones de tipo simbólico (R2), ya que recurre al cálculo indirecto del área de cada uno de los tres triángulos. Del mismo modo, utiliza el procedimiento que implica medir las longitudes de cada triángulo, aplicar la fórmula y obtener el área de cada uno de los triángulos (P3).

Figura 5. Tercer procedimiento utilizado por la EPM 66



"Si tenemos una hoja impresa podemos calcular el área ((bxh)/2) con la regla y sus medidas reales. (no será 100% exactas porque la regla tiene una precisión de 1mm. Como no tengo impresora, lo he dibujado (cada cuadrado es de 1cm x 1cm)".

En la siguiente cita se muestra la primera parte del proceso interpretativo realizado por la EPM 3 a la respuesta de una alumna de 2.º de la ESO. Se identifican categorías de conocimiento de los subdominios del KFLM. La EPM 3 identifica que la alumna en cuestión necesita conocimientos que pueden ser útiles (conocimientos como fortalezas) para resolver la tarea planteada, es decir, conocimientos que le ayudarían a superar sus dificultades en esta tarea. La EPM 3 señala que Tània necesita adquirir conocimientos sobre las propiedades de cuadrados y triángulos rectángulos, además de la descomposición de figuras en otras figuras (Fd2). Si bien es cierto la EPM no hace explícitas las propiedades del cuadrado, podemos inferir que se refiere a que dicha figura se puede dividir en dos triángulos rectángulos isósceles, mediante el trazado de una de sus diagonales, pues es lo que muestran las resoluciones de la Figura 2. La EPM menciona la necesidad de conocer y operar con el teorema Pitágoras (Fd3), se infiere que esto va en relación con las propiedades de los triángulos (Fd2), ya que, cuando éstos son rectángulos, el lado mayor se puede obtener mediante dicho teorema. Igualmente, la EPM señala que la alumna necesita adquirir un conocimiento sobre fracciones (Fd1) por su utilidad al momento de repartir un todo en partes de igual área y al calcular la fracción de un número (1/3 de

12). Por último, la EPM hace referencia a "giros", se infiere que ella se refiere a los movimientos de rotación (Fd4) que se pueden ejecutar sobre el cuadrado negro. En este contexto, se infiere que la EPM interpreta el pensamiento matemático de la alumna tomando en consideración su propio conocimiento de las matemáticas, y de su estructura, es decir, su KoT y KSM. Así, se infiere que la EPM tiene conocimiento sobre procedimientos de descomposición de superficies, propiedades de los cuadrados y triángulos rectángulos, y teorema de Pitágoras.

> Los conocimientos que la Tània necesita interiorizar son diversos… hay que entender las propiedades del cuadrado… Además, un concepto que nos será muy útil son los giros, para observar que la figura geométrica negra también es un cuadrado. Otro sería el teorema de Pitágoras, ya que la fórmula es necesaria para descubrir la diagonal y para saber cuánto mide el cuadrado negro… las fracciones, ya que son un elemento clave para poder resolver este ejercicio… las propiedades de los triángulos, más concretamente los triángulos rectángulos… éstos nos pueden ayudar a la hora de hacer las particiones de la figura con el objetivo de saber el área del cuadrado negro.

La cita de abajo muestra la segunda parte del proceso interpretativo realizado por la EPM 3. Se distinguen indicadores de conocimiento del KFLM y KMT. La EPM 3 identifica que la alumna comete un error al confundir la diagonal del cuadrado con su lado (Er1) y propone el uso de diferentes procedimientos (E2) para subsanar dicho error. Una de las opciones que propone la EPM, se infiere, es manipulativa ya que señala que la alumna puede comparar el lado y la diagonal del cuadrado poniendo ambos en paralelo, a fin de observar sus longitudes. La EPM señala que dicho procedimiento ayudaría a trabajar el teorema de Pitágoras. El cálculo de fracción de una cantidad es otro error que la EPM identifica (Er2). Para esto, propone orientar a la alumna utilizando un procedimiento que implica medir cada uno de los tres segmentos en los que se divide el lado del cuadrado grande (E2). Por último, la EPM reconoce que el uso de heurísticas de resolución de problemas puede ser una estrategia clave para orientar el aprendizaje de la alumna (E1). La interpretación del pensamiento matemático de la alumna, realizada por la EPM 3, involucra la identificación de errores y la generación de estrategias: usar procedimientos diferentes para avanzar en el conocimiento de la alumna, consolidar conocimientos útiles y subsanar errores. Así, la EPM es capaz de proponer una pregunta que tiene como finalidad evocar una situación equivalente, a fin de que la alumna pueda cuestionar la pertinencia/adecuación de un procedimiento, e introducir el uso de un procedimiento alternativo al uso de cálculos y fórmulas.

> Para ayudarla, hemos de concretar todos aquellos conceptos que no tenemos claros…Para ello, observaremos cómo la diagonal del cuadrado no mide lo mismo que uno de sus lados (como se justifica en su respuesta)… tenemos varias opciones, una primera opción es que posicione en paralelo el lado del cuadrado para observar que la diagonal es más larga. Otra sería darle una regla para medir el lado… al tratar el teorema de Pitágoras, la primera opción es mejor… luego se puede encontrar la medida de la diagonal a través de la fórmula… Realiza una fracción incorrecta, para que observe su error haremos que divida el lado en tres segmentos y que ponga en cada segmento cuántos centímetros tiene. Así, podrá observar visualmente, o través de una suma, que 1/3 de 12cm no son 8cm. Por

último, intervendremos en la partición de figuras en pequeños triángulos ... haremos una buena pregunta ¿Cuál es la figura geométrica con la que podemos partir el cuadrado? (sólo usando esa figura)? A partir de aquí, podemos observar que Tània intentará dar una respuesta por medio de ensayo y error.

4. RESULTADOS

Los ejemplos mostrados en el análisis evidencian la manera en que los EPM movilizan conocimiento sobre las distintas categorías del KoT, KSM, KFLM y KMT, pero no permiten identificar la tendencia que tienen los EPM al momento de resolver tareas e interpretar respuestas de alumnos. Por tal razón, consideramos oportuno mostrar la frecuencia de cada una de las categorías que movilizan los EPM. La Tabla 3 detalla dicha frecuencia, se incluyen aquí las resoluciones erróneas, ya que, aunque los EPM no logran responder lo que se demanda en la tarea, sí logran movilizar algún indicador de conocimiento. Por ejemplo, es posible que en la Tarea 4 los EPM respondan con uso de un solo procedimiento y/o cometan errores al identificar la base y alturas de los triángulos, pero logran movilizar el indicador (P3).

Tabla 3. Categorías de conocimiento especializado que movilizan los EPM (N=70)

	Categorías de conocimiento		**Número de EPM**
KoT	Representaciones (R)	(R1)	33
		(R2)	70
	Procedimientos (P)	(P1)	17
		(P2)	30
		(P3)	63
		(P4)	25
	Propiedades (Pp) y principios (Pr)	(Pp1)	64
		(Pp2)	27
		(Pr1)	2
		(Pr2)	10
	Justificaciones (J)	(J1)	17
KSM	Conexiones auxiliares	(Cau1)	11
	Conexiones de simplificación	(Csm)	17
KFLM	Fortalezas y dificultades	(Fd1)	14
		(Fd2)	37
		(Fd3)	26
		(Fd4)	1
	Errores	(Er1)	19
		(Er2)	14
KMT	Estrategias de enseñanza	(E1)	18
		(E2)	21

Aunque los EPM habían tenido instrucción previa sobre los procesos de medición de áreas, menos de la mitad hace uso de representaciones de tipo geométrico para dar solución a la Tarea 4, lo que indica que la mayoría de los EPM no responde según la demanda (con uso de dos o tres procedimientos diferentes). Por el contrario, los 70 EPM muestran uso de representaciones de tipo simbólico, quedando en evidencia la tendencia a asociar el área con su registro de representación basado en la fórmula (Caviedes et al., 2019; Simon y Blume, 1994, Tierney et al., 1990). El uso de principios geométricos relacionados con los procedimientos, por ejemplo, que todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo, se evidencia sólo en 2 EPM. Por su parte, la propiedad de transitividad, debido a que la tarea solicitaba comparar áreas de diferentes triángulos, se evidencia en 64 EPM. Respecto al subdominio del KSM, es posible evidenciar que aquellos EPM que utilizan procedimientos asociados a la descomposición de superficies, establecen una conexión simplificación con un procedimiento más elemental (conteo de unidades cuadradas). Por su parte, las conexiones auxiliares se hacen explicitas con el uso del teorema de Pitágoras.

Respecto a la interpretación que realizan los EPM sobre la resolución de una alumna (Tània), es posible evidenciar que se movilizan categorías de conocimiento especializado en dominio del PCK. La interpretación realizada por la EPM 3 muestra que ciertos conocimientos se presentan como fortalezas al momento de resolver la tarea planteada. Por ejemplo, 37 EPM identifican que las propiedades de los polígonos corresponden a un conocimiento necesario para resolver la tarea, y que resulta clave para subsanar la confusión diagonal-lado. Sin embargo, sólo la EPM 66 reconoce que las transformaciones isométricas son un conocimiento necesario (Figura 4). Respecto a los errores, menos de la mitad de los EPM señala de manera explícita la confusión diagonal-lado que manifiesta la alumna, o bien, las operaciones con fracciones. Respecto a las estrategias de enseñanza, menos de la mitad de los EPM señala el uso de heurísticas de resolución de problemas y procedimientos diversos, como posibles opciones para guiar el aprendizaje. En su mayoría, los EPM realizan un análisis descriptivo con base en la resolución de Laia (alumna que resuelve la tarea utilizando diversos procedimientos), es decir, describen los procedimientos utilizados por ella y mencionan que el procedimiento seguido por la otra alumna es incorrecto, quedándose en la dicotomía correcto-incorrecto. En este contexto, sólo una minoría de EPM es capaz de interpretar el pensamiento matemático de Tània.

5. Discusión y conclusiones

El análisis de procedimientos y justificaciones proporcionadas por los EPM sugiere una tendencia generalizada a asociar el área con el uso de fórmulas y cálculos, aspecto que ya se ha confirmado en investigaciones anteriores (Baturo y Nason, 1996; Caviedes et al., 2019; Simon y Blume, 1994) y que permitiría una extrapolación de los resultados obtenidos. Dicha tendencia limita la movilización de categorías pertenecientes al KoT en la Tarea 4, tales como representaciones, procedimientos y justificaciones, propiedades y proposiciones. Esto, porque el uso de fórmulas excluye los procedimientos relacionados con la descomposición y reorganización de superficies, los que pueden hacer explícito el uso de diferentes propiedades y proposiciones, así como las representaciones de tipo geométrico. Así mismo, la utilización exclusiva de fórmulas y cálculos limita la movilización de categorías pertenecientes al KSM, como las conexiones auxiliares (p. ej., el teorema de Pitágoras). De esta manera, las dificultades de los EPM son desencadenadas por su falta de conocimiento sobre varias formas de resolución para la Tarea 4. La resolución de la EPM 66 muestra que, cuando los procedimientos de descomposición y/o reorganización de superficies se utilizan en conjunto con procedimientos que involucran fórmulas y cálculos, las categorías de conocimiento especializado, en el subdominio del KoT, aumentan. De esta manera, podría ser importante demandar el uso de procedimientos diversos a los EPM, a fin de que puedan resolver tareas de área movilizando distintos indicadores y categorías del KoT y superar la tendencia hacia el uso de cálculos.

La interpretación realizada por los EPM sugiere que algunas categorías de conocimiento especializado son necesarias para interpretar el pensamiento matemático de Tània. Por ejemplo, la resolución de la EPM 3, a la Tarea 8, muestra evidencias de que los subdominios del KoT, KSM, KFLM y KMT están en estrecha relación con el proceso de interpretar (Badillo y Fernández, 2018). Esto, porque dicho proceso requiere de la identificación de conocimientos que se presentan como fortalezas (p. ej., teorema de Pitágoras) —KFLM— al momento de resolver tareas de área. Estos conocimientos implicarían, a su vez, un conocimiento previo sobre la estructura del área —KSM— en términos de las conexiones auxiliares que se requieren para resolver las tareas, por lo que las categorías del KFLM y KSM no serían excluyentes, sino que podrían dar cuenta de diferentes niveles de conocimiento. Mientras el KSM involucra las relaciones entre conceptos matemáticos, el KFLM implica una interpretación de estas relaciones (como fortalezas-debilidades) para el aprendizaje del área. Por su parte, el KMT proporciona herramientas para el análisis de los errores que comete la alumna (p. ej., confusión diagonal-lado), y la toma de decisiones para la reorientación de dichos errores mediante estrategias de enseñanza (p. ej., uso de heurísticas de resolución de problemas). Tanto las decisiones tomadas, como los errores identificados, se ven vinculados con la movilización estratégica del conocimiento matemático de los EPM —KoT y KSM— (p. ej., propiedades de los cuadrados y triángulos rectángulos, teorema de Pitágoras), por lo que dicho conocimiento permitiría a los EPM identificar la manera en que las estrategias de los estudiantes reflejan su comprensión sobre los procesos de medición de áreas (Jacobs et al., 2010).

Los resultados sugieren que las categorías del MTSK permiten describir una complejidad progresiva en el conocimiento de los EPM, pues un mismo tópico puede ser indicador de diferentes categorías y subdominios (lo que depende de la capacidad de los EPM para usarlo en la interpretación de las respuestas de alumnos y planificación de estrategias de enseñanza). Así, la potencialidad del MTSK está en que la relación entre subdominios puede informar sobre dicha complejidad progresiva en el proceso interpretativo, quedando en evidencia que no son subdominios disjuntos de conocimiento. Esto podría tener implicaciones en la secuenciación estratégica de tareas para los formadores de EPM, pues los indicadores propuestos para cada categoría podrían ser utilizados para construir conocimiento especializado de manera gradual en los EPM. Igualmente, creemos necesario realizar más estudios que permitan explorar, refinar o cuestionar la utilidad de los indicadores propuestos.

6. Agradecimientos

ANID PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018-72190032, PID2019-104964GB-I00 (MINECO-España) y GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR. Estudio realizado en el Programa de Doctorado en Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Referencias

Badillo, E., & Fernández, C. (2018). *Oportunidades que emergen de la relación entre perspectivas: análisis del conocimiento y/o competencia docente.* En L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. García & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 66-80). SEIEM.

Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bassey, M. (1990). *On the nature of research in education*. Research Intelligence.

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational studies in mathematics*, *31*(3), 235-268. https://doi.org/10.1007/BF00376322

Browning, C., Edson, A., Kimani, P., & Aslan-Tutak, F. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on geometry and measurement. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(2), 333-383. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1306

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Contreras, L., & Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). ERME.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Agular-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Caviedes, S., De Gamboa, G., & Badillo, E. (2019). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, *15*(1), 69-87. https://doi.org/10.21676/23897856.2984

Caviedes, S., De Gamboa, G., y Badillo, E. (2021a). Mathematical objects that configure the partial area meanings mobilized in task-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *54*(6), 1092-1111. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1991019

Caviedes, S., De Gamboa, G., & Badillo, E. (2021b). Aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. & Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 213-220). SEIEM.

Fernández, C., & Choy, B. H. (2020). *Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing.* En S. Llinares & O. Chapman (Eds.), International Handbook of Mathematics Teacher Education (Vol. 2, pp. 337-360). Brill Sense.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel.

Hong, D., & Runnalls, C. (2020). Examining Preservice Teachers' Responses to Area Conservation Tasks. *School Science and Mathematics*, *120*(5), 198-208. https://doi.org/10.1111/ssm.12409

Jacobs., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for research in mathematics education*, *41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Krippendorff, K. (2004) *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. Sage.

Liñan, M., Barrera, V., & Infante, J. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: La resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta*, *17*(1), 41-63. https://doi.org/10.29257/EA17.2014.04

Livy, S., Muir, T., & Maher, N. (2012). How do they measure up? Primary pre-service teachers' mathematical knowledge of area and perimeter. *Mathematics Teacher Education and Development*, *14*(2), 91-112.

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos*, *10*, 53-62.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Routledge Falmer.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. (2013). MTSK: From Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194). ERME.

Policastro, M., Mellone, M., Ribeiro, M., & Fiorentini, D. (2019). Conceptualising tasks for teacher education: from a research methodology to teachers' knowledge development. En U. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the CERME 11* (No. 24). ERME.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of mathematics teacher education*, *8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Runnalls, C., & Hong. D. (2020). "Well, they understand the concept of area": pre-service teachers' responses to student area misconceptions. *Mathematics Education Research Journal*, *32*(4), 629-651. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00274-1

Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Scheiner, T., Montes, M., Godino, J. D., Carrillo-Yañez, J. & Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153-172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Sherin, M. G., & van Es, E. (2009). Effects of Video Club Participation on Teachers' Professional Vision. *Journal of Teacher Education*, *60*(1), 20-37.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Simon, M. & Blume, G. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 472-494. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.5.0472

Tatto, M., Peck, R., Schwille, J., Bankov, K., Senk, S. L., Rodriguez, M., Ingvarson, L., Reckase, M. & Rowley, G. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-MM)*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

Thomas, J., Jong, C., Fisher, M., & Schack, E. (2017). Noticing and Knowledge: Exploring Theoretical Connections between Professional Noticing and Mathematical Knowledge for Teaching. *The Mathematics Educator*, *26*(2), 3-25.

Tierney, C., Boyd, C. & Davis, G. (1990). Prospective primary teachers' conceptions of area. En G. Booker, P. P. Cobb & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the IGPME 14* (Vol. 2, pp. 307-314). PME.

∞

Sofía Caviedes Barrera

Universitat Autònoma de Barcelona (España)
sofia.caviedes@autonoma.cat | https://orcid.org/0000-0002-5304-212X

Genaro de Gamboa Rojas

Universitat Autònoma de Barcelona (España)
genaro.degamboa@uab.cat | https://orcid.org/0000-0003-0366-3988

Edelmira Badillo Jiménez

Universitat Autònoma de Barcelona (España)
edelmira.badillo@uab.cat | https://orcid.org/0000-0001-6296-4591

Recibido: 15 de octubre de 2021
Aceptado: 27 de junio de 2022

Mathematical and didactic knowledge of preservice primary teachers about the area of 2d figures

Sofía Caviedes Barrera @, Genaro de Gamboa Rojas @, Edelmira Badillo Jiménez @

Universitat Autònoma de Barcelona (España)

This study seeks to characterize elements of the specialised knowledge of a group of pre-service teachers (PST) in the third year of the Primary Education degree at the Autonomous University of Barcelona. Emphasis is placed on the domains of Mathematical Knowledge and Pedagogical Content Knowledge. In the first domain, evidence is sought of knowledge of the subdomains of Knowledge of Topics and Knowledge of the Structure of Mathematics. Regarding the second domain, evidence is sought of knowledge of the subdomains of Knowledge of the Features of Learning Mathematics and Knowledge of Mathematics Teaching. The procedures and written justifications that PSTs use in solving an area task and in interpreting students' responses to an area task, are analysed. The results show that the use of different procedures (e.g., decomposition and reorganization of surfaces) is related to the mobilization of different indicators of the sub-domain of Knowledge of Topics, while promoting the establishment of connections with other mathematical contents (e.g., Pythagorean theorem). In this sense, the indicators of knowledge proposed for the subdomain of Knowledge of Topics can serve as a reference of what PSTs should know for their future practice, when teaching on area measurement processes, as they allow detailing different representations, procedures, properties and principles that are put into play in such processes. With regard to the indicators defined for the analysis of the subdomains of Knowledge of the Features of Learning Mathematics and Knowledge of Mathematics Teaching, these are related to a greater ability of PSTs to interpret students' responses. In this way, the mobilization of the defined indicators allows PSTs to identify certain useful knowledge (in terms of strengths) that students need to solve the proposed task (e.g., isometric transformations, properties of polygons and the Pythagorean theorem). In addition, such indicators allow PSTs to identify some of the mistakes that students make (e.g., diagonal-side confusion). Finally, the defined indicators allow PSTs to make decisions to redirect the errors made by students in solving the task. This, through the use of teaching strategies that involve the use of alternative procedures to formulas and calculation, and the use of problem-solving heuristics.